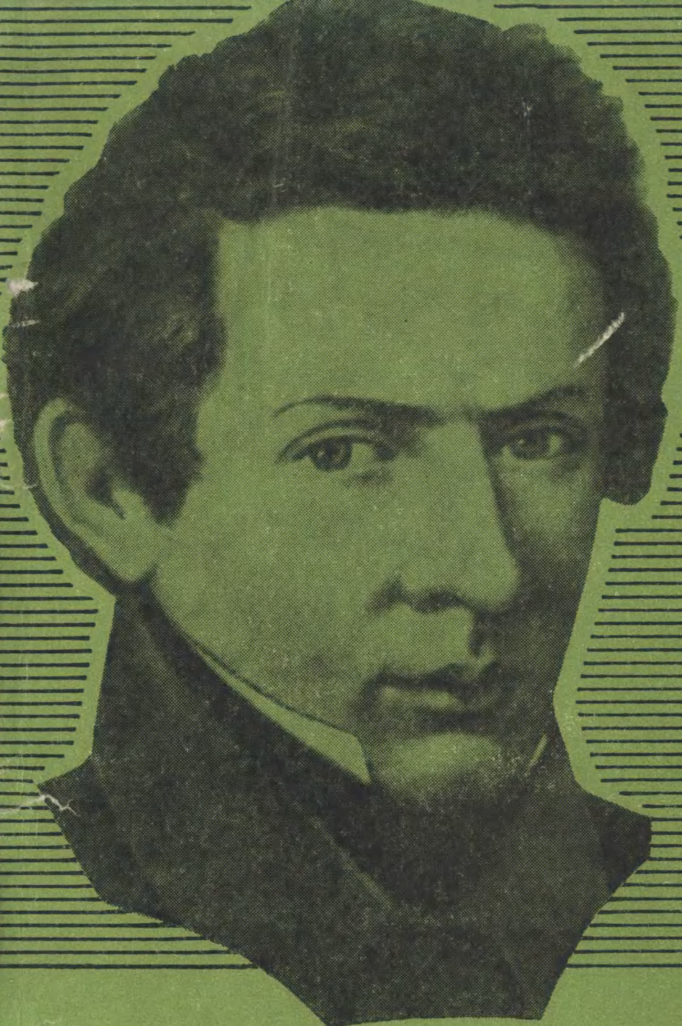


ЛЮДИ НАУКИ

Б.Л.Лаптев

Н.И. ЛОБАЧЕВСКИЙ И ЕГО ГЕОМЕТРИЯ

ЛЮДИ НАУКИ

Б. Л. Лаптев

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ И ЕГО ГЕОМЕТРИЯ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

Москва „ПРОСВЕЩЕНИЕ“ 1976

Лаптев Б. Л.

Л24 Н. И. Лобачевский и его геометрия. Пособие для учащихся. М., «Просвещение», 1976.

112 с. с ил. (Люди науки).

Пособие предназначено для внеклассного чтения учащихся VIII—X классов. Основную часть его составляет доступное изложение геометрических идей Лобачевского. В конце дан обзор дальнейшего развития неевклидовой геометрии и современных применений геометрии Лобачевского в математике и физике.

Л $\frac{60601-723}{103(03)-76}$ 275—76 517.5

ОТ АВТОРА

Создание Николаем Ивановичем Лобачевским новой геометрии, получившей впоследствии его имя, было смелым шагом в не изведанную еще область: теоремы новой геометрии, казалось, противоречили привычному пространственному опыту.

Лобачевский представил 7(19) февраля 1826 г. в физико-математическое отделение Казанского университета свое сочинение «Exposition succincte de Principes de Géométrie...» («Сжатое изложение начал геометрии...»). 11(23) февраля были назначены рецензенты, а 12(24) февраля он читал свое рассуждение на заседании Отделения. Таким образом, в феврале 1976 г. исполнилось 150 лет геометрии Лобачевского.

Впоследствии, во второй половине XIX в., были созданы и другие неевклидовы геометрии, но первый шаг был, конечно, особенно труден, так как впервые отвергались казавшиеся незыблемыми уже более двух тысяч лет некоторые исходные положения учения о пространстве.

Лобачевского справедливо сравнивали с Колумбом—открывателем новых земель, и с Коперником, изменившим взгляды его современников на Вселенную, «сдвинувшим» Землю с ее привилегированного неподвижного положения в центре мира.

Существует обширная литература о жизни, деятельности и научных трудах гениального русского ученого. В специальных работах освещены отдельные периоды его жизни, или те или иные стороны его деятельности, его материалистическое мировоззрение, история распространения и развития его идей. В больших исследованиях по истории математики Лобачевскому и его трудам посвящены специальные главы, в энциклопедиях и сборниках биографий великих ученых — отдельные статьи.

Настоящая книга стремится ввести учащихся старших классов средней школы, не имеющих особой подготовки по высшей математике, в круг идей неевклидовой геометрии Лобачевского, познакомить с основными моментами биографии ученого, с его длившейся до конца жизни борьбой за утверждение научной истины, с важным значением открытия Лобачевского для развития физико-математических наук.

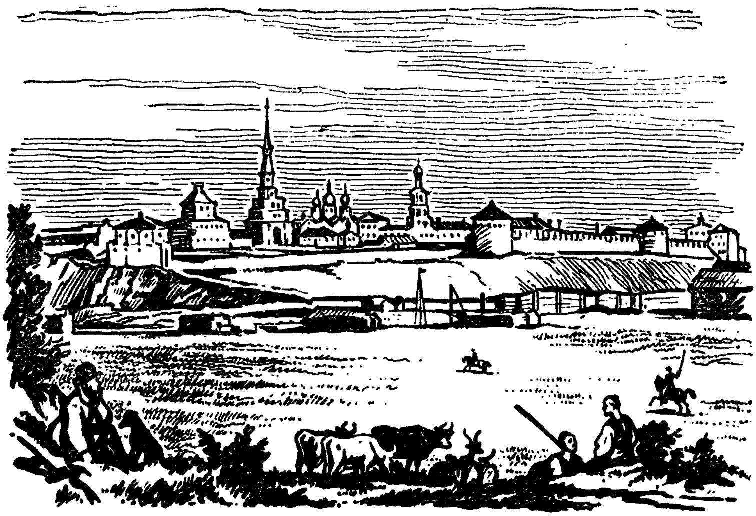
Часть первая

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ, ЕГО ЖИЗНЬ И ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

I. ДЕТСКИЕ ГОДЫ. ГИМНАЗИЯ И УНИВЕРСИТЕТ. НАЧАЛО НАУЧНОЙ И ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Дата рождения Николая Ивановича Лобачевского 20 ноября (1 декабря) 1792 г. была установлена сравнительно недавно. Она была выявлена по материалам Нижегородского краевого архивного бюро и впервые названа С. Богодиным в газете «Нижегородская коммуна», № 222, 1929. До этого в литературе условно указывали 20 октября 1793 г.

Н. И. Лобачевский родился в семье мелкого чиновника — губернского регистратора межевой конторы — Ивана Максимовича Лобачевского в Нижнем Новгороде (ныне г. Горький). О родителях Ивана Максимовича известно, что его отец до 1775 г. служил у князя М. Долгорукого «в певческой должности», а мать была крепостной этого помещика. Иван Максимович был принят на государственную службу в Москве в 1777 г., а в Нижегородскую межевую контору переведен в 1787 г., но через два года «за болезнию уволился». Тогда же (или в 1790 г.) он женился на Прасковье Александровне (ее девичью фамилию установить не удалось). Через семь лет он вновь поступил в контору, которая, однако, вскоре была расформирована, а чиновники переведены в Уфу. В январе 1800 г. по его заявлению он вновь был «за болезнию» уволен и приехал в Нижний Новгород к семье. Дальнейшими сведениями о нем мы не располагаем. У Прасковьи Александровны Лобачевской родились три сына: Александр — в 1791 г., Николай — в 1792 г. и Алексей — в 1795 г. В церковных записях за 1799 г. все три мальчика названы воспитанниками «умершего капитана Сергея Шебаршина». С. С. Шебаршин был титулярным советником, землеме-



Вид Казани

ром упомянутой конторы и был вдов. Он скончался 15 октября 1797 г. По-видимому, он был родственником П. А. Лобачевской и помогал ей воспитывать детей. (В книге Д. Тарджеманова «Юность Лобачевского» в живой художественной форме даны различные этапы детства, юности и студенческих лет великого геометра.)

В 1802 г. Прасковья Александровна привезла всех трех сыновей в Казань, чтобы отдать их в ученье. В те годы из всех городов Поволжья и Сибири только в Казани имелась гимназия. П. А. Лобачевская подала 5 ноября прошение о приеме ее сыновей в гимназию «...на собственное содержание до открытия вакансии на казенное...». Прошение ее было удовлетворено, и мальчики стали гимназистами. (Николая перевели на казенное содержание только в сентябре 1803 г.) Николай был принят в начальный класс и, хотя долго болел, по окончании года за хорошие успехи был награжден книгами и переведен в следующий (нижний) класс.

Его учителя Ф. П. Краснов, а затем А. И. Васильев отмечали, что он прилежен и хорош. В последних двух высших математических классах его учили Н. М. Ибрагимов и Г. И. Корташевский (последний преподавал одновременно и в университете). У Ибрагимова Лобачевский обучался в высшем арифметическом классе с осени 1804 по январь 1805 г. Затем он посещал полгода геометрический класс Корташевского (с февраля 1805 г. до летнего периода в этом классе была пройдена только алгебра). В дальнейшем геометрический класс был передан Ибрагимову, который преподавал тогда также российский язык, литературу и латинский язык. Несомненно, что за два с половиной года обучения у него он мог оказать большое влияние на формирование интересов юного Лобачевского. Ибрагимов всегда упоминал Лобачевского в качестве лучших своих учеников.

В гимназические годы Лобачевского (они завершились к концу 1806 г.) в Казани в помещениях гимназии открылся Университет. Это был четвертый университет в России. Вскоре был открыт еще Харьковский университет, а ранее существовали Московский, Дерптский и Виленский. Указ об открытии Казанского университета был издан 5(17) ноября 1804 г., а в феврале 1805 г. в Казань приехал попечитель учебного округа С. Я. Румовский, чтобы осуществить фактическое открытие университета. Академик С. Я. Румовский (ученик Л. Эйлера) — математик и астроном — принадлежал к поколению первых русских ученых, воспитанных в Петербургской академии наук. Организации Казанского университета он и в дальнейшем уделял большое внимание. Особо заботясь о преподавании физико-математических наук, он приглашал видных иностранных ученых. Вначале профессорами были утверждены два преподавателя гимназии: директор гимназии И. Ф. Яковкин (он фактически исполнял затем обязанности ректора университета в течение первых десяти лет) и преподаватель истории, географии и статистики П. А. Цеплин (выходец из Германии), а преподавателям Г. И. Корташевскому, И. И. Запольскому, Л. С. Левицкому и И. И. Эриху в качестве адъюнктов было поручено чтение курсов. Из старших классов гимназии были отобраны 33 лучших ученика и переведены в студенты. Так 14 февраля 1805 г. начал свою работу Казанский университет, причем разделения на факультеты, естественно, не было.

Как горячо восприняли образование университета ученики гимназии, мы знаем из воспоминаний писателя С. Т. Аксакова — «первого студента» университета (в алфавитном списке его имя стояло на первом месте): «Занимались не только днем, но и по ночам. Все похудели, все переменились в лице, и начальство принуждено было принять деятельные меры для охлаждения такого рвения. Дежурный надзиратель всю ночь ходил по спальням, тушил свечки и запрещал говорить, потому что и впотьмах повторяли наизусть друг другу ответы в пройденных предметах». (Аксаков С. Т. Собрание сочинений, т. 2. М., 1955, с. 123.)

Лобачевский сделался студентом почти через два года после фактического открытия университета. В конце 1805/06 учебного года успехи Лобачевского были отмечены большим похвальным листом, и он вместе с другими лучшими учениками старшего класса был намечен к переводу в студенты. Однако отобранных учеников подвергли дополнительным экзаменам, после которых их признали «не довольно успевшими в языках» и оставили в гимназии для усовершенствования «особенно в латинском языке». Только после повторных экзаменов в декабре 1806 г. перевод в студенты состоялся. Проведение дополнительных экзаменов объясняется тем, что знание иностранных языков студентам было особенно необходимо, так как профессора-иностранцы не знали русского языка и преподавали на латинском или немецком языках (иногда на французском). Следует также учесть, что необходимая литература тоже в основном была на иностранных языках.

С января 1807 г. четырнадцатилетний Лобачевский значится казенным студентом и допущен к посещению занятий. Однако к этому времени математик Г. И. Корташевский, о котором так тепло вспоминает С. Т. Аксаков, уже был уволен из университета (с ноября 1806 г.), после ссоры с самовластным И. Ф. Яковкиным, возглавлявшим одновременно гимназию и университет. Преподавание математики было поручено двум студентам, воспитанникам Г. И. Корташевского: А. Княжевичу и В. Графу. Несмотря на их хорошую теоретическую подготовку, им, конечно, не хватало педагогического и научного опыта, и к тому же они не имели руководителя. Только через год положение исправилось. В Казань из Германии прибыл и начал читать лекции видный математик профессор М. Х. Бартельс. Он был приглашен Румовским еще в 1805 г., но задержался с переездом. Бартельс являлся весьма квалифицированным математиком, очень опытным лектором, но творческой исследовательской работы он не вел. В молодые годы среди его учеников был К. Ф. Гаусс, который, сделавшись выдающимся ученым, продолжал в дальнейшем поддерживать с ним дружескую переписку, не касаясь, однако, математических проблем.

Бартельс читал студентам плоскую и сферическую тригонометрию, аналитическую и дифференциальную геометрию, математический анализ и астрономию. Он прочел также в 1810 г. курс истории математических наук. Число слушателей у него было невелико, и среди них особенно выделялись И. Симонов и Н. Лобачевский. Бартельс в 1811 г. писал: «Они оказали столько успехов, что даже во всяком немецком университете были бы отличными...» «...особливо же Лобачевский. ...Об искусстве последнего предложу хотя бы один пример, ...поручил я старшему[1] Лобачевскому предложить студентам под моим руководством пространную и трудную задачу о вращении, которая мною для себя уже была по Лагранжу в удобопонятном виде обработана». Далее Бартельс сообщал, что он изложил решение этой задачи в четыре приема, а Симонову поручил конспектировать его лекции. «Но Лобачевский, не пользовавшись сею запискою, при окончании последней лекции подал мне решение сей столь запутанной задачи на нескольких листочках, в четверку написанное. Г-н академик Вишневский, бывший тогда здесь, неожиданно восхищен был сим небольшим опытом знаний наших студентов».

Лобачевский в октябре 1809 г. был рекомендован, как особо отличившийся в учебе, к назначению «камерным студентом» (староста казенных студентов, живущих в студенческих комнатах — «камерах») и после назначения стал получать 60 руб. в год на книги. Но характеризуя совету его поведение, директор-инспектор Яковкин отметил и некоторые отклонения от желательного благонравия. Он писал, что Лобачевский «часто вел себя очень хорошо, выключая иногда случавшихся проступков, в коих, однако же, к чести его сказать, сказывал после чистосердечное, кажется, признание и исправлялся...». Здесь сделан намек на событие 1808 г., когда Лобачевский был наказан за изготовление ракеты, которую студенты запустили поздно вечером во дворе университета,

---

[1] Старший из братьев Лобачевских — Александр — утонул в 1807 г., так что речь идет о Николае.

вызвав большой шум и волнение. Чтобы выявить виновного, Яковкин приказал всех подозреваемых студентов лишить обеда. Через три дня один из студентов сознался, что он запустил ракету, которую ему дал Лобачевский.

Живой и самостоятельный характер юного Лобачевского нередко приводил его к столкновениям с администрацией, ограничивающей формальными правилами элементарную свободу поведения студентов. Уже через несколько месяцев после процитированного отзыва в рапорте помощника инспектора П. С. Кондырева сообщается, что в январе 1810 г. «Лобачевский 1-й оказался самого худого поведения. Несмотря на приказание начальства не отлучаться из университета, он в Новый год, а потом еще раз, ходил в маскарад и многократно в гости, за что опять наказан написанием имени на черной доске»... «несмотря на сие он после того снова еще был в маскараде». А через год весной 1811 г. Лобачевского лишают звания «камерного студента», так как он был «замечен в соучаствовании и потачке проступкам студентов, грубости и ослушании». И если осенью 1810 г. фамилия Лобачевского стояла на первом месте в предварительном списке студентов, достойных ученого звания магистра, то в год окончания университета (весной 1811 г.) он уже вычеркнут из этого списка. Ученая степень магистра присваивалась при окончании университета лучшим студентам. Остальные получали звание кандидата. Магистры оставались при университете для усовершенствования в науках под руководством профессора (аналог аспирантуры), которому также должны были помогать в преподавании, разъясняя студентам непонятные места. Несомненно, причиной этого вычеркивания послужил новый рапорт Кондырева от 27 мая 1811 г., который всю картину прошлого поведения студента Лобачевского изображал в следующем виде:

«Лобачевский 1-й в течение трех последних лет был по большей части весьма дурного поведения, оказывался иногда в проступках достопримечательных, многократно подавал худые примеры для своих сотоварищей, за проступки свои неоднократно был наказываем, но не всегда исправлялся; в характере оказался упрямым, нераскаянным, часто ослушным и весьма много мечтательным о самом себе, в мнении, получившем многие ложные понятия...».

Эта уничтожающая инспекторская характеристика позволяет представить себе молодого Лобачевского, уже ощущающего свои растущие силы, его горячность и смелость в борьбе с косностью взглядов и правил. А новый рапорт даже добавлял, что Лобачевский «в значительной степени явил признаки безбожия».

Однако 7 июля 1811 г. члены совета профессора Бартельс, Броннер и Литтров, знавшие и ценившие необыкновенные способности и глубокие знания Лобачевского, вступились за него и настояли на включении его имени в списки достойных быть магистрами. Решено было вызвать Лобачевского на очередное заседание совета, объявить ему выговор и потребовать, чтобы он дал честное слово исправиться. Его вызвали 10 июля, и ему пришлось подтвердить письменно свое обещание. После этого он был включен в список, а затем 3 августа 1811 г. утвержден магистром.

В студенческие годы Лобачевский обучался, как гласит его послужной список, «...логике, римским древностям, истории и географии, латинскому языку, правам российским и естественному, химии и технологии, зоологии и ботанике, прослушал курс российской словесности и наук физико-математических, как-то: арифметику, геометрию, алгебру, прямолинейную и сферическую тригонометрию, конические сечения, стереометрию, дифференциальные, интегральные и варьяционные исчисления, аналитическую геометрию и механику, статику, гидростатику, аэростатику, гидравлику, оптику, катоптрику и диоптрику, историю математических наук и в особенности астрономии, сферическую, теоретическую и физическую астрономию, физику умозрительную и опытную; при изучении математических наук оказал отличнейшие успехи, дарование и прилежание к оным...».

В годы магистерства Лобачевский штудировал под руководством Бартельса классические труды: «Арифметические исследования» К. Ф. Гаусса и «Трактат о небесной механике» П. С. Лапласа. Он представил на факультет рассуждение «Теория эллиптического движения небесных тел» (1812) и оригинальное исследование о разрешении двучленных уравнений (1813). Он не только разъяснял студентам лекции Бартельса, но и вел занятия по арифметике и геометрии в открытых чтениях для чиновников (март — октябрь 1812 г. и 1813 г.), обязанных сдавать экзамены.

26 марта 1814 г. Лобачевский был произведен в адъюнкт-профессоры (аналог современного доцента) и с осени этого же года начал вести самостоятельное преподавание (его педагогическая деятельность охарактеризована в разделе IV).

В 1814 г. состоялось «полное открытие университета», т. е. была упорядочена его структура, выделены четыре факультета (отделения), проведено избрание ректора и деканов (деканом физико-математического отделения был избран Бартельс).

В 1814/15 учебном году Лобачевский читал тригонометрию и теорию чисел по Гауссу и Лежандру. Затем в последующие два учебных года он читал обзорный курс элементарной математики, а затем дифференциальное исчисление. Сохранились студенческие записи его математических лекций за эти три года, показывающие самостоятельный подход к изложению материала. В частности, весной 1817 г. он сделал оригинальную попытку доказать V постулат Евклида, установив при этом ряд важных предложений абсолютной геометрии и подготовив этим почву для своего будущего открытия.

В 1816 г. Лобачевского назначают экстраординарным профессором (одновременно с Симоновым), и он постепенно все глубже входит в жизнь и интересы Казанского университета. Он участвует в работе училищного комитета, ему поручают проверку и упорядочение библиотеки; он выручает факультет, ведя преподавание физики вместо Броннера, уехавшего из Казани в 1817 г. в длительный отпуск.

С 1819 г. жизнь университета резко изменяется. В целях борьбы с революционными настроениями и вольнодумством, развивающимся среди русской интеллигенции в те годы, правительство Александра I проводит все более реакционную линию и пытается найти идеологическую опору в религии, в мистико-христианских учениях. Университеты, чтобы искоренить зарождающееся в них свободомыслие и атеизм, в первую очередь подвергаются проверке.

Для обследования Казанского университета был назначен и прибыл в марте 1819 г. член Главного правления училищ М. Л. Магницкий. Он явно стремился выслужиться и в своем отчете, считая «единым основанием народного просвещения благочестие», пришел к выводу, что университет «причиняет общественный вред полуученостью образуемых им воспитанников... особенно же противным религии их духом деизма», а потому «подлежит уничтожению в виде публичного его разрушения» (т. е. закрытия) ради назидательного примера для других государств.

Однако университет не был закрыт. Александр I решил работу университета перестроить. Попечителем Казанского учебного округа был назначен М. Л. Магницкий, который и приступил к «обновлению университета». Он начал свою деятельность увольнением девяти профессоров, введением преподавания «богопознания и христианского учения» и изъятием из библиотеки книг «вредного направления» для их сожжения. Он приказал вывесить в аудиториях религиозные тексты и составил инструкции для преподавания каждой науки в духе религиозного ханжества. Например, «Профессор теоретической и опытной физики обязан во все продолжение курса своего указывать на премудрость божию и ограниченность наших чувств и орудий для познания непрестанно окружающих нас чудес. Профессор естественной истории покажет, что обширное царство природы, как ни представляется оно премудро и в своем целом для нас непостижимо — есть лишь слабый отпечаток того высшего порядка, к которому после кратковременной жизни мы предопределены» и т. п.

Многие профессора, подчиняясь инструкциям, приспосабливали свое преподавание к подобным требованиям. Так Г. Б. Никольский в объяснительной записке к программе по механике на 1824 г. писал: «Праотец наш Адам получал нужное наставление непосредственно от своего Создателя... Ему не нужно было учиться подобно нам... Пребывая в раю на Востоке, он прямо получал свет от Солнца правды... Он был превосходный богослов, философ, математик, естествослов и проч. ...» и далее в том же духе.

За содержанием лекций и студенческих записок была установлена тщательная слежка, и для студентов введен суровый казарменный режим.

Семь лет этой церковно-полицейской системы принесли Лобачевскому тяжелые испытания, но не сломили его непокорный дух. Он ведет обширную и многообразную педагогическую, административную и исследовательскую деятельность. Он преподает математику вместо уехавшего в Дерпт (Тарту) Бартельса; продолжает замещать Броннера, так и не вернувшегося в Казань из отпуска, читает физические курсы, заботится об оборудовании физического кабинета, закупает приборы в Петербурге; он замещает Симонова, отправившегося в плавание с экспедицией Беллинсгаузена, и читает астрономические курсы, приняв в свое ведение обсерваторию. В течение ряда лет его избирают деканом. Он занят упорядочением библиотеки и расширением ее физико-математической части. Он — активнейший член, а затем и председатель строительного комитета (строился главный университетский корпус (1822—1825).

Но, несмотря на многочисленные обязанности, Лобачевский не прекращает напряженной научной деятельности. Он пишет два учебника для гимназий: «Геометрию» (1823) и «Алгебру» (1824). Первый из них получает отрицательный отзыв у академика Н. К. Фусса, не оценившего изменений, внесенных в традиционное изложение, и осудившего введение метрической системы мер, поскольку она создана в революционной Франции, а второй не был опубликован из-за внутренних проволочек.

Вскоре начались столкновения с попечителем. Лобачевский в преподавании физико-математических наук всегда стоял на материалистических позициях. Он отказался от произнесения актовой речи, в которой следовало прибегать к религиозным рассуждениям и восхвалять Магницкого. По словам последнего, он стал проявлять дерзость, своеволие, нарушение инструкций. И Магницкий решает установить особый надзор за его поведением.

В этих принижающих достоинство ученого условиях мысль Лобачевского продолжала работать над построением начал геометрии, и эта напряженная работа завершается гениальным открытием — созданием новой геометрии.

II. СОЗДАНИЕ НОВОЙ ГЕОМЕТРИИ И БОРЬБА ЗА НАУЧНУЮ ИСТИНУ. ДРУГИЕ ТВОРЦЫ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ: БОЙАИ И ГАУСС

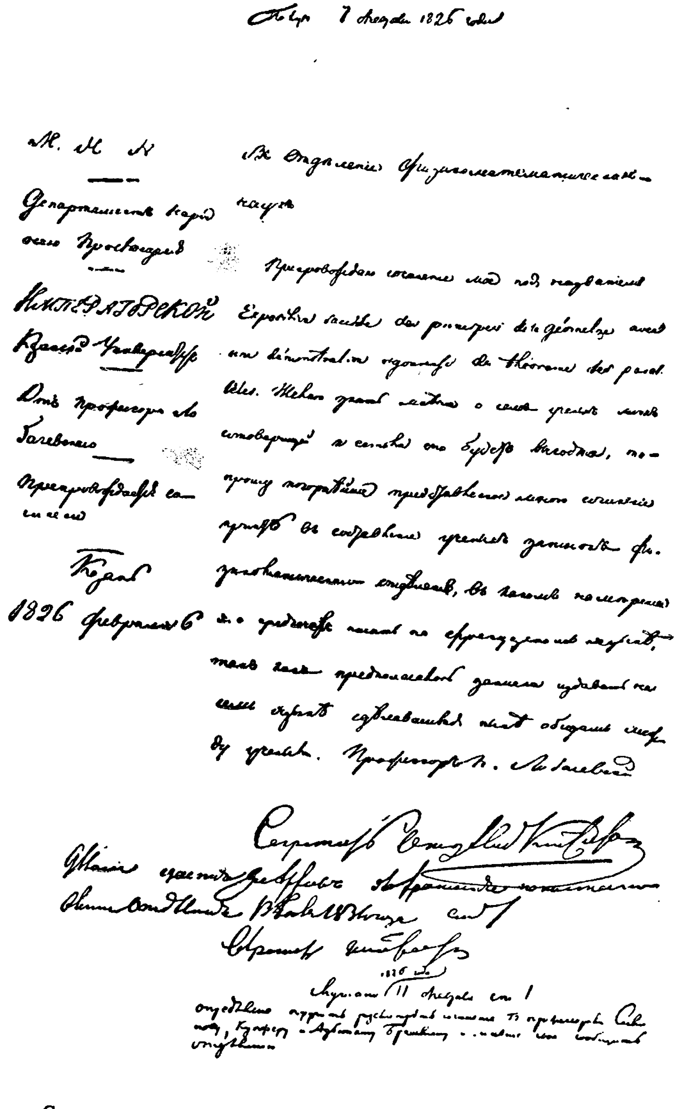
Первое сообщение о созданной им новой геометрии Лобачевский сделал 7 (19) февраля 1826 г. Он представил в Отделение физико-математических наук университета свое сочинение «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллелях» и просил поместить его в подготавливаемых к изданию «Ученых записках», если мнение сотоварищей-ученых будет положительным. Из сопроводительной записки мы знаем, что сочинение было написано на французском языке, «сделавшимся», как писал Лобачевский, «ныне общим между учеными».

Вопрос о рекомендации к опубликованию рассматривался 11(23) февраля, и была назначена комиссия, в которую вошли профессор И. М. Симонов, профессор А. Я. Купфер и адъюнкт Н. Д. Брашман. Сам Лобачевский указывал впоследствии, что он читал это рассуждение на заседании Отделения 12 февраля 1826 г.

Однако комиссия письменных отзывов не представила. Возможно, что причиной этого было непонимание или недооценка труда Лобачевского. Но всего вероятнее, причина заключалась в том, что, поскольку издание «Ученых записок» не осуществилось, редакционная подготовка стала излишней.

Через год, в 1827 г., Лобачевский был избран ректором университета, и к его научно-педагогической деятельности добавились ответственные и нелегкие административные обязанности (раздел III). Только через три года после сообщения он находит время опубликовать в журнале «Казанский вестник» свое исследование «О началах геометрии». Это была первая в мировой печати работа по неевклидовой геометрии. Работа содержала не только основную часть его сочинения 1826 г., но и отражала дальнейшее развитие его идей, в частности в ней было дано вычисление площадей и объемов ряда фигур и тел, примеры применения новой геометрии к вычислению некоторых определенных интегралов и трактовка вопроса о геометрии физического пространства.

Геометрия, созданная и разработанная Лобачевским, являлась более общей, чем евклидова, и включала последнюю как предельный случай. Основное ее отличие заключалось в более богатой свойствами (но, конечно, и более сложной) теории параллельных прямых. Сам Лобачевский называл ее воображаемой в отличие от евклидовой, названной им употребительной. В последних своих трудах он пользовался названием «пангеометрия» (всеобщая геометрия), отражавшим тот факт, что евклидова геометрия входит в нее как предельный случай.



Сопроводительная записка к сочинению Лобачевского «Сжатое изложение...» (1826)

Впоследствии Ф. Клейном было введено название «гиперболическая геометрия» (раздел X).

Выявить, какая из геометрий действует в реальном физическом пространстве, могли только наблюдения, только эксперименты. Такой подход вполне соответствовал материалистическим взглядам Лобачевского, рассматривавшего природу как объект для научных исследований, объект, существующий вне и независимо от исследователя. Он писал: «Всем известно, что в геометрии теория параллельных до сих пор оставалась несовершенной. Напрасное старание со времен Евклида, в продолжение двух тысяч лет, заставило меня подозревать, что в самых понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения».

Чтобы отчетливее представить себе, в чем заключалась «проблема параллелей» и как Лобачевский созданием своей геометрии разрешил эту проблему (а точнее, в философском смысле, снял ее), следует обратиться к истории вопроса, освещенной во второй части книги (раздел VIII), и к основным результатам новой геометрии (раздел IX).

Важность проблемы, решенной Н. И. Лобачевским, не была быстро осознана и оценена его современниками. В течение всей своей жизни он вел борьбу за признание новой геометрии, разрабатывая и углубляя свои результаты, находя для них новые применения и новые обоснования своих идей.

Нередко он встречал полное непонимание и даже оскорбительное отношение со стороны специалистов-математиков. Так, его замечательный труд «О началах геометрии» (1829—1830), явившийся первым опубликованным исследованием в новой области и открывший в математике период разработки неевклидовых геометрий, был отвергнут Академией наук. Это произошло следующим образом.

По решению совета университета от 19 августа 1832 г. труд Лобачевского был послан в Академию наук в соответствии с желанием автора «в знак уважения сему высокому сословию мужей».

По поручению Академии работу Лобачевского рассмотрел и сделал о ней в ноябре 1832 г. устное сообщение известный математик академик М. В. Остроградский.

О НАЧАЛАХЪ ГЕОМЕТРІИ (*).

(*Г. Лобачевскаго.*)

Кажется, трудность понятій увеличивается по мѣрѣ ихъ приближенія къ начальнымъ истинамъ въ природѣ; также какъ она возрастаетъ въ другомъ направленіи, къ той границѣ, куда стремится умъ за новыми познаніями. Вотъ почему трудности въ Геометріи должны принадлежать, вопервыхъ, самому предмету. Далѣе, средства, къ которымъ надобно прибѣгнуть, чтобы достигнуть здѣсь послѣдней строгости, едва ли могутъ отвѣчать цѣли и простотѣ сего ученія. Тѣ, которые хотѣли удовлетворить симъ требованіямъ, заключили себя въ такой тѣсной кругъ, что всѣ усилія ихъ не могли быть вознаграждены успѣхомъ. Наконецъ скажемъ и то, что со времени Нютона и Декарта, вся Математика, сдѣлавшись Аналитикой, пошла столь быстрыми шагами впередъ, что оставила далеко за собой то ученіе, безъ котораго могла уже об-

(*) Извлечено самимъ Сочинителемъ изъ разсужденія, подъ названіемъ: *Exposition succincte des principes de la Géometrie etc.*, читаннаго имъ въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ, 12 Февраля 1826 года.

Первые страницы сочинения Лобачевского

ходиться и которое съ тѣмъ вмѣстѣ перестало обращать на себя вниманіе, какое прежде заслуживало. Евклидовы начала такимъ образомъ, не смотря на глубокую древность ихъ, не смотря на всѣ блистательные успѣхи наши въ Математикѣ, сохранили до сихъ поръ первобытные свои недостатки.

Въ самомъ дѣлѣ, кто не согласится, что никакая Математическая наука не должна бы начинаться съ такихъ темныхъ понятій, съ какихъ, повторяя Евклида, начинаемъ мы Геометрію; и что нигдѣ въ Математикѣ нельзя терпѣть такого недостатка строгости, какой принуждены были допустить въ теоріи параллельныхъ линій. Правда, что противъ ложныхъ заключеній отъ неясности первыхъ и общихъ понятій въ Геометріи предостерегаетъ насъ представленіе самыхъ предметовъ въ нашемъ воображеніи; а въ справедливости принятыхъ истинъ безъ доказательства убѣждаемся простотою ихъ и опытомъ, на-примѣръ астрономическими наблюденіями; однакожъ все это нисколько не можетъ удовлетворить умъ, пріученный къ строгому сужденію. Къ тому и не въ правѣ пренебрегать рѣшеніемъ вопроса, покуда оно неизвѣстно и покуда не знаемъ, не послужитъ ли оно еще къ чему другому.

«О началах геометрии» (1829)

Оно содержало резко отрицательную оценку труда Лобачевского. Остроградский совершенно не придал значения созданию новой геометрии. В своем рапорте он писал: «Автор, по-видимому, задался целью писать таким образом, чтобы его нельзя было понять». Упоминая далее о новой геометрии, вытекающей из гипотезы, что сумма углов в треугольнике меньше, чем два прямых угла, и ее приложениях к вычислению определенных интегралов, он ограничился замечанием, что один из них легко получить классическим путем, а другой неверен (последнее было несправедливо). В итоге он пришел к выводу: «Все, что я понял в геометрии г-на Лобачевского, ниже посредственного»... и в заключение написал: «Книга г-на ректора Лобачевского опорочена ошибкой, небрежно изложена и, следовательно, не заслуживает внимания Академии».

А через два года в октябре 1834 г. в реакционном журнале Ф. Булгарина и Н. Греча «Сын отечества», № 41, появилась написанная в издевательском тоне критика на работу Лобачевского, подписанная инициалами С. С. Нет сомнения, что эта рецензия возникла не без влияния М. В. Остроградского. Неизвестный рецензент писал: «Как можно подумать, чтобы г-н Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какою-нибудь серьезною целию книгу, которая не много бы принесла чести и последнему приходскому учителю? Если не ученость, то по крайней мере здравый смысл должен иметь каждый учитель, а в новой геометрии нередко недостает и сего последнего». В заключение он предлагал назвать книгу Лобачевского «Сатира на геометрии, карикатура на геометрии».

Лобачевский послал в редакцию журнала свои возражения на эту критику, но они не были опубликованы, хотя министр народного просвещения обязал издателя журнала поместить их.

Встретив непонимание и издевательства, Лобачевский не прекратил своей работы над развитием новой геометрии и продолжал отстаивать свои идеи, понимая их чрезвычайное значение. Одна за другой появляются следующие его геометрические работы: «Воображаемая геометрия» (1835), где он исходит из найденных им тригонометрических соотношений и по ним восстанавливает всю свою геометрию; «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1836), в которой найдено более двухсот определенных интегралов и получены формулы для объема прямоугольного тетраэдра; «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1835—1838), где вскрыты ошибки в известных в научной литературе доказательствах пятого постулата, высказаны общие соображения о возможности существования различных геометрий и отмечены ожидаемые приложения новой геометрии при исследовании природы; после критики Евклида за неясность исходных понятий Лобачевский дал в этом труде подробное изложение своей системы геометрии, опирающейся не на сумму углов треугольника, а на новую аксиому параллельности.

Стремясь познакомить европейских ученых со своими идеями, Лобачевский публикует две свои работы за границей. Одну на французском языке (1837) (это был несколько измененный текст «Воображаемой геометрии»), а другую, содержащую сжатое и доступное изложение новой геометрии, в виде отдельной книжки «Geometrische Untersuchungen» на немецком языке (1840).

Наконец за год до смерти, он, уже больной и ослепший, диктует для сборника, посвященного 50-летию университета (1855), свой последний труд «Пангеометрия» (иначе говоря, «Всеобщая геометрия»). В год его смерти этот труд выходит еще и во французском переводе.

Так до самой своей кончины Лобачевский вел борьбу за утверждение своих идей, значение которых не смогли оценить его современники. При жизни Лобачевского было опубликовано только два положительных отклика на его работы. Профессор Казанского университета П. И. Котельников в своей актовой речи «О предубеждении против математики» (1842) высказался сочувственно об этих идеях, выразив надежду, что «изумительный труд г-на Лобачевского... рано или поздно найдет своих ценителей». Второе высказывание относится к более поздним годам. В 1851 г. венгерский математик Фаркаш Бойаи в своей малоизвестной книге, сравнивая идеи Лобачевского с результатами, полученными его сыном Яношем, поражался сходством этих идей, появившихся почти одновременно в разных странах у двух математиков, не знавших друг друга.

Был и еще один отзыв, но он был высказан в частной переписке, и о нем узнали значительно позднее. Это был отзыв К. Ф. Гаусса, пришедшего к неевклидовой геометрии независимо от Лобачевского (подробнее об этом см. далее) и раньше его. Познакомившись с упомянутым выше небольшим сочинением Лобачевского «Geometrische Untersuchungen», изданным в Германии, он был восхищен им, о чем написал своим друзьям. Однако в печати с поддержкой идей Лобачевского он не выступил, хотя и предложил избрать его за отличные научные заслуги, не уточняя какие, членом-корреспондентом Геттингенского ученого общества (академии), директором которого состоял. Избрание было осуществлено в ноябре 1842 г.

Славу создания неевклидовой геометрии, как уже было сказано, Лобачевский разделяет с Я. Бойаи и К. Ф. Гауссом. Оба они пришли независимо от Лобачевского к той же общей системе геометрии.

Янош Бойаи (1802—1860), военный инженер, сын Фаркаша Бойаи, преподавателя математики в колледже небольшого венгерского города. Во время своего обучения в Военной академии в Вене Янош увлекся проблемой параллелей. Отец, узнав об этом, пришел в отчаянье. Сохранилось его письмо от 1823 г. к сыну, в котором он писал: «Ты не должен пытаться одолеть теорию параллельных линий на этом пути, я знаю этот путь, я проделал его до конца, я пережил эту беспросветную ночь и всякий светоч, всякую радость жизни я в ней похоронил... Эта беспросветная мгла может поглотить тысячу таких гигантов, как Ньютон, и никогда на земле не прояснится...»

Однако Янош продолжал работать над проблемой параллельных, и есть сведения, что в 1825 г. он показывал рукопись своего исследования одному из венских математиков, преподавателю Академии.

По окончании Академии Я. Бойаи был направлен в чине младшего лейтенанта в городок Тимишоара. Но служба его не удовлетворяла. Здоровье его пошатнулось, стала проявляться раздражительность, возникали ссоры и дуэли с другими офицерами. Геометрия была его единственным утешением. В 1833 г. после десятилетней военной службы он вышел в отставку и переехал к отцу. Результаты своих геометрических исследований ему удалось опубликовать в 1832 г. на латинском языке в виде Приложения, или Прибавления (по-латыни Appendix [8]) к первому тому Обширного курса математики его отца. Полное название этого труда в русском переводе звучит так: «Приложение, содержащее науку о пространстве абсолютно истинную, независящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида, что a priori никогда решено быть не может».

«Аппендикс» содержит сжатое и систематическое изложение основ той же системы геометрии, которую разработал Лобачевский. Причем автор особенно старался получать теоремы в форме, пригодной для абсолютной геометрии. Однако отец не мог воспринять идеи сына и для разрешения спора отправил работу по выходе ее из печати на суд Гаусса, с которым еще в юные годы дружил и потом переписывался. (Однако их переписка уже ряд лет как прекратилась.)

Ответ Гаусса был неожиданным и, можно даже сказать, двусмысленным. Он писал, что не может хвалить работу Яноша, так как это значило бы хвалить самого себя, потому что он сам давно пришел к этой системе геометрии, но решил при жизни ничего о ней не публиковать, опасаясь встретить непонимание. Кое-что немногое он уже записал для себя. Он поражен, что сын друга изложил его идеи и таким образом освободил его от обязанности выполнить этот труд.

Гаусс не оказал открытой поддержки замечательным идеям «Аппендикса» Бойаи и нигде в печати об этой книге не высказывался. Янош Бойаи был поражен таким странным ответом знаменитого ученого и отсутствием хотя бы моральной поддержки с его стороны. Ему даже казалось, что Гаусс просто хочет вырвать у него приоритет открытия. Позднее, когда он познакомился с «Геометрическими исследованиями» (1840) Лобачевского и узнал из этой книги, что первое изложение новой системы опубликовано еще в 1829 г. в «Казанском вестнике», т. е. на два года ранее «Аппендикса» (следует учесть, что отдельные оттиски «Аппендикса» появились в 1831 г.), он сначала заподозрил, что никакого Лобачевского не существует, что все это (в том числе и 1829 г.) придумал Гаусс, укрывшийся под псевдонимом Лобачевский, с единственной целью присвоить приоритет открытия. Но потом он стал тщательно анализировать текст, объективно отмечая как оригинальные достижения, так и отдельные недоговоренности в изложении. Однако дальнейших исследований по развитию неевклидовой геометрии Я. Бойаи не проводил, а одно время даже думал, что обнаружил в ней противоречие.

К. Ф. Гаусс

Революция 1848 г. всколыхнула его надежды на установление справедливого социального строя, свои мысли о котором он ранее высказал в оставшемся в рукописи сочинении «Учение о всеобщем благе». Но сам он в это время был тяжело болен, лежал с парализованными ногами, и поэтому принять участие в революционной борьбе не мог. Народная армия после ряда побед потерпела поражение. В 1849 г. австрийские войска получили подкрепление: Николай I послал русских солдат для восстановления императорской власти Габсбургов, и революция была подавлена. Наступила пора реакции. Янош Бойаи, лишенный поддержки, тяжело болел. Он скончался в 1860 г. в крайней бедности. Слава пришла к нему лишь в XX в.

Обратимся теперь к одному из крупнейших математиков того времени — К. Ф. Гауссу (1777—1855), имя которого мы уже упоминали. О его исследованиях по неевклидовой геометрии стало известно лишь после его кончины, когда были опубликованы его переписка и научные дневники. О причинах его нежелания высказываться открыто по этому вопросу мы уже упоминали. Эту же причину он сам упоминал и в других письмах к своим друзьям. Многие исследователи, кроме того, указывают, что он вообще никогда не спешил с публикацией своих результатов. Однако на основе анализа переписки Гаусса А. П. Норденом [14] показано, что одной из основных причин его молчания явилось свойственное ему идеалистическое мировоззрение. Гаусс сам долго не мог примириться со своим открытием, с возможностью существования новой обобщенной геометрии. Появление новой геометрии вызывало необходимость опытной проверки аксиомы параллельности (или суммы углов треугольника), а это наносило удар по идеалистической трактовке математики Гауссом, согласно которой математика (арифметика, анализ, геометрия) — это чистое творение человеческого духа, выражающее единственным образом внутреннее воззрение на мир.

Потребность в эксперименте перемещала геометрию в разряд прикладных наук, наук более низких по Гауссу, подобных механике. Внутреннее сопротивление и связанные с ним длительные сомнения в допустимости новой геометрии помешали ему занять твердые позиции и настойчиво проводить исследования в этой области, хотя интерес к этим вопросам и первые мысли, с ними связанные, появились у него еще в молодые годы. Только получив в 1819 г. письмо с заметкой юриста Швейкарта, математика-любителя, который без каких-либо доказательств набросал ряд соображений о возможности новой «звездной геометрии», Гаусс постепенно убеждается в необходимости проводить разработку неевклидовой геометрии и принимает решение начать записывать собственные исследования. В 1832 г. он получает «Аппендикс» Бойаи, а в 1840 г. знакомится с «Геометрическими исследованиями» Лобачевского и некоторыми другими его работами. В письме 1846 г. он высоко оценил работу Лобачевского: «...все это развито Лобачевским мастерски и в чисто геометрическом духе, хотя и на другом пути, чем тот, которым шел я».

Гаусс увидел, что опубликование его собственных исследований стало излишним, так как Лобачевский в развитии неевклидовой геометрии продвинулся уже значительно дальше его.

Но если Гауссу его идеалистическое мировоззрение помешало в развитии и публикации новой геометрии, то Лобачевский, стоявший твердо на материалистических позициях (раздел V), именно благодаря своему мировоззрению нашел силы отказаться от ограничений V постулата и проявил смелость при публикации своих идей о возможности построения другой более общей геометрии. По Лобачевскому, эта система может глубже и полнее описывать свойства объективно существующего пространства, и только опыт может выявить, какая из логически возможных геометрий реализуется в реальном физическом пространстве.

Лобачевский опирался на новейшие, опубликованные в те годы в научной литературе астрономические наблюдения и показал, что, предполагая систему общей геометрии, мы будем делать очень малые ошибки, если будем пользоваться более простой евклидовой геометрией. (Для нижней границы величины k получилась очень большая величина.) Для «употребительной геометрии» было получено таким образом экспериментальное обоснование на базе общей геометрии. Вопрос о том, реализуется ли общая геометрия на более обширных протяжениях вселенной, пока еще недоступных наблюдению, остался открытым. Но тогда Лобачевский показал, что его геометрия, как любая математическая теория, может находить приложения в самой математике. Он применил ее, как мы уже упоминали, в математическом анализе для вычисления определенных интегралов.

Подводя итоги, мы видим, что славу создания новой геометрии разделяют с Лобачевским и Гаусс, и Бойаи, но приоритет в публикации принадлежит Лобачевскому, который, кроме того, в течение всей своей жизни продолжал развивать свои идеи и не прекращал борьбы за торжество научной истины.

III. НАЧАЛО РЕКТОРСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ. РЕЧЬ О ВАЖНЕЙШИХ ПРЕДМЕТАХ ВОСПИТАНИЯ

В те дни 1826 г., когда Лобачевский представил, а затем и прочитал свой доклад, карьера попечителя Казанского учебного округа, лицемерного святоши Магницкого, потерпела крушение.

Как известно, после смерти Александра I вместо наследника Константина на престол вступил его младший брат Николай. В этом же году произошло восстание декабристов. Магницкий в дни междуцарствия в поисках новых высоких покровителей действовал неудачно и вызвал даже подозрение о связях с декабристами. И если это подозрение вскоре отпало, то сказалась неугодная новым властям его мистико-христианская направленность, а также, что может быть еще важнее, его мелкие столкновения с Николаем, которые он себе позволил в прежние годы, никак не ожидая, что тот займет престол.

В январе — феврале 1826 г. была проведена генерал-майором Желтухиным ревизия дел попечителя и состояния университета, выявившая многие упущения и недостатки, и Магницкий 6 мая 1826 г. был освобожден от должности, а затем предан суду сената.

Новый попечитель М. Н. Мусин-Пушкин, назначенный 24 февраля 1827 г., был помещиком Казанской губернии и не отличался гуманными взглядами или широким образованием. Он воспитывался и учился в домашних условиях и в 1810 г. сдал экзамены при Казанском университете, дававшие право лицам, не имеющим государственного высшего образования, занимать должности высокого класса. Затем он проходил военную службу и участвовал в походах 1812—1814 гг. По свидетельствам современников, в обращении он был груб, но не жесток, горяч и деспотичен, но отходчив и справедлив. Естественно, что как попечитель М. Н. Мусин-Пушкин был заинтересован в повышении уровня университетской работы.

О причинах, побудивших его при выборах ректора остановиться на кандидатуре Лобачевского, можно высказать следующие соображения. В качестве ректора ему был нужен ученый, пользующийся уважением своих коллег, преданный идее развития и улучшения университета и способный энергично действовать. Нет сомнений, что ему было известно донесение П. Ф. Желтухина от 10 марта 1826 г. министру народного просвещения о произведенной ревизии. Называя профессоров, пользующихся всеобщим уважением публики и отличающихся познаниями и поведением, ревизор поместил фамилию Лобачевского на первом месте. Коллеги доверяли ему, он избирался неоднократно деканом, выполнял ряд поручений по устройству библиотеки и научных кабинетов, был активным участником, а затем председателем строительного комитета.

Таким образом, М. Н. Мусин-Пушкин имел все основания видеть в Лобачевском вполне подходящую кандидатуру на пост ректора, более подходящую, чем занимавший в то время этот пост профессор К. Ф. Фукс, обладавший, правда, рядом достоинств, но безвольный, не умевший навести порядок даже на заседаниях совета университета и притом целиком подпавший в предыдущие годы под влияние Магницкого.

Новый попечитель, явившись в Казань, организовал досрочные выборы ректора. Очевидно, он проводил предварительно конфиденциальные переговоры с Лобачевским и другими членами совета. Лобачевский не сразу дал согласие на ректорство. Это видно из его последующих писем попечителю (раздел VI). Оторваться от научных занятий, когда рождались идеи величайшей важности, ему было нелегко. Но на ответственном посту ректора открывалась возможность активно участвовать в улучшении Казанского университета и таким образом выполнить общественный долг ученого: содействовать всеми силами развитию науки и высшего образования. Это и склонило его дать согласие. Баллотировка состоялась 3 мая 1827 г., и Лобачевский был избран на трехлетний срок (он получил 11 голосов «за» и 3 «против»; ближайший к нему кандидат профессор Г. Б. Никольский получил 7 «за» и 7 «против»).

После первого года ректорства Лобачевский 5 июля 1828 г. на торжественном акте, посвященном выпуску студентов, произнес речь «О важнейших предметах воспитания», затем опубликованную в «Казанском вестнике» за 1832 г.

Эту речь нельзя рассматривать как простую дань официальным требованиям, она не содержит чисто риторических высказываний в оптимистическом тоне о роли воспитания, о грядущих успехах в развитии Русского государства и образования в нем. В этой речи новый ректор говорит о принципах и направлении своей деятельности. Здесь Лобачевский высказал свои подлинные взгляды на цели и значение воспитания и образования, на методы научного познания, на назначение и роль ученого в жизни общества. Здесь также выражены его истинные надежды на более благоприятные условия развития науки и образования в России в будущем, возникшие в связи с изменениями, только что происшедшими в жизни университета.

Семилетний период попечительства Магницкого тяжело сказался на жизни университета: малейшие признаки свободомыслия подавлялись, за жизнью студентов и преподавателей был установлен постоянный церковно-полицейский надзор, инструкции обязывали вести преподавание «в духе строгого благочестия», подчиняя науку религиозным воззрениям.

И хотя определенное расширение материальной части университета и осуществлялось (строительство главного корпуса, оборудование кабинетов и небольшой астрономической обсерватории, приобретение научной литературы и др.), но в целом уровень научной жизни и преподавания упал, так как сразу было уволено 9 профессоров, а многие другие, опасаясь подобных репрессий, уехали или подчинились нелепым инструкциям.

В этой тяжелой обстановке Лобачевский проводил свои напряженные научные исследования, вел с увлечением преподавание широкого круга физико-математических дисциплин и энергично участвовал в организационной деятельности. Магницкий сначала ценил его как талантливого, высокообразованного молодого ученого, прекрасного преподавателя, успешно выполнявшего ряд поручений по приобретению научного оборудования и научной литературы, по руководству физико-математическим отделением, по строительству. Но в последний год своего попечительства он изменил отношение к Лобачевскому, обвинил его в дерзости, в своеволии, в нарушении инструкций, причем решил даже установить особый надзор за его поступками.

Таким образом, освобождение университета от опеки Магницкого Лобачевский должен был воспринять с глубоким удовлетворением, оно позволяло надеяться на дальнейшие перемены, благоприятные для развития университета. Это в действительности и осуществилось по крайней мере в первые два десятилетия, но, конечно, прежде всего благодаря ему самому, благодаря его неустанному труду на посту ректора. Так сложилось парадоксальное положение — начало Николаевской эпохи ознаменовалось для Казанского университета наступлением периода раскрепощения, произошло освобождение от нелепых инструкций, за которым последовал и быстрый расцвет.

Таковы были обстоятельства, предшествовавшие произнесению речи Лобачевским, и они отчасти объясняют как общий ее тон, так и отдельные высказанные в ней мысли. Лобачевский затрагивает в связи с задачами воспитания множество различных вопросов и среди них проблему научного метода познания природы, роль языка, вопросы эстетического и этического воспитания и др.

Речь начинается с ораторского вступления. Лобачевский, отметив, что уже год трудится на посту ректора, говорит, как трудно ему было оторваться от научных занятий. Он принял должность ректора, лишь подчиняясь мнению товарищей и стремясь принести пользу университету. Он жалуется на недостаток своих сил, но его ободряет улучшение обстановки в университете и внимание попечителя.

Называя истекший год годом испытания, он надеется, что следующий будет годом исполнения, а третий —

годом успеха («торжества моего»), и просит критики и советов по поводу высказываемых им далее принципов воспитания.

Затем он останавливается на роли воспитания и образования, преобразующих дикого человека в гармонично развитого просвещенного члена общества. Ничто не должно подавляться, даже страсти полезны в обществе, только их направление может быть вредно.

Касаясь понятий инстинкта, ума и разума, Лобачевский характеризует гений как соединение инстинкта (здесь, по-видимому, подразумевается то, что мы называем интуицией) с умом и ставит задачу перед воспитателями — открыть гениального юношу, обогатить его познаниями, а далее дать ему свободу в его творчестве.

Замечательна характеристика разума, т. е. логического мышления, включающая положение о познаваемости мира: «Разум, это значит, известные начала суждения, в которых как бы отпечатались первые действующие причины вселенной и которые соглашают таким образом все наши заключения с явлениями в природе, где противоречия существовать не могут».

Особо подчеркивается значение языка в развитии просвещения. Необычайным успехам математических наук способствовали создание и использование специальной математической символики, т. е. как бы языков различных исчислений.

Как примечательное достижение научной мысли охарактеризован «прямой метод научного познания». Его «указал нам знаменитый Бакон» (Ф. Бэкон). «Оставьте,— говорил он,— трудиться напрасно, стараясь извлечь из одного разума всю мудрость; спрашивайте природу, она хранит все истины и на вопросы ваши будет отвечать вам непременно и удовлетворительно» (эксперимент — критерий истины). Гений Декарта разрушил схоластическую науку, и теперь «едва тень древней схоластики бродит по университетам». (Это намек на нередко преподаваемую в университетах в те годы модную идеалистическую натурфилософию шеллингианского толка.)

Далее обрисовано направление развития университетского образования и преимущества общественного воспитания перед домашним.

Задачи воспитания Лобачевский понимает очень широко. Он стремится воспитать всесторонне развитого, жизнелюбивого человека, которому доступно понимание красоты. Он говорит, что овладение специальными знаниями («образование умственное») еще не завершает воспитания, так как человек «еще должен учиться уметь наслаждаться жизнию». Поэтому в юноше необходимо воспитывать общую культуру и развивать эстетическое чувство («образованность вкуса»). Только тогда жизнь будет воспринята им в ее движении, будет увлекать появлением нового, и человек будет находить прекрасное в этом движении, в колебаниях противоборствующих сил, в восприятии то веселого, то печального.

Лобачевский сурово осуждал невежество: «Мертвою, прямою дорогою провожает оно жизнь от колыбели к могиле». И если у крестьян или ремесленников чередование необходимого изнурительного труда и отдыха еще «услаждает жизнь», то у невежд из привилегированных сословий жизнь полностью теряет свое достоинство. Лобачевский восклицает: «Но вы, которых существование несправедливый случай обратил в тяжелый налог другим; вы, которых ум отупел и чувство заглохло, вы не наслаждаетесь жизнию. Для вас мертва природа, чужды красоты поэзии, лишена прелести и великолепия архитектура, незанимательна история веков». И его радует мысль, что «из университета не выйдут подобные произведения растительной природы и даже не войдут сюда».

По Лобачевскому, человеку присущ дух соревнования, желание превосходить других. И стремление ума возвыситься и прославиться является движущей силой бесконечного совершенствования человечества.

Касаясь вопросов жизни и смерти, Лобачевский говорит, что теперь, когда он «переступил через вершину ... жизни», он воспринимает с особо острым чувством все явления органической природы. Он вскрывает диалектику жизни и смерти, ярко и эмоционально описывая процесс: растение — зерно — растение.

Привлекая образ яблока, подтачиваемого червем, он требует от воспитателей оградить юношество от пороков, которые подобно червю сокращают жизнь.

Но как преодолеть ужас смерти, «этой бездны все поглощающей», ибо сознание неизбежности смерти может отравить человеку его существование. Лобачевский видит выход в пробуждении с юных лет «любви к отече-

3 Заказ 3105

ству» и «истинного понятия о чести», т. е. высоких идеалов, которые будут способствовать проявлению творческого начала и дадут силу «торжествовать над ужасом смерти».

Лобачевский касается и вопросов этики. Будучи вынужденным занимаемой должностью (ректор) и обстоятельствами (актовая речь) связать хотя бы внешне вопросы морали с положениями христианской религии, он упоминает «премудрость Творца», проявившуюся в том, что человеку свойственна не только любовь к самому себе, но и любовь к ближнему. В чувстве любви к ближнему Лобачевский видит основу общественной природы человека, возможность его нравственного воспитания.

Он упрекает философов, которые, выявив роль любви к себе в развитии общества, забыли о роли любви к ближнему (Дюкло, Ларошфуко, Гельвеций), причем некоторые из них (Гоббс, Гельвеций) даже отрицали, что «человек рожден для общества».

Нравственность, как полагает Лобачевский, лучше воспитывать не рассуждениями, а с помощью живых примеров.

Обращаясь к студентам, Лобачевский говорит, что примеры бескорыстной любви к ближнему и желания ему добра они видели у своих наставников, обучавших их и прививавших им высокие и добрые чувства, и хотя сейчас воспитанники еще не в состоянии оценить эти слова из-за множества впечатлений и недостатка жизненного опыта, но и для них «придет время, когда на блеске настоящего вдруг явится прошедшее с обворожительной прелестью своего туска, подобно нежной, затуманенной резьбе на ярком золоте...», и тогда они вспомнят с благодарностью годы учения и своих наставников.

Основная мысль заключения — «Вы счастливее меня, родившись позже... ибо счастливейшие дни России впереди» — выражает подлинные надежды и чувства Лобачевского.

Переходя к оценке речи «О важнейших предметах воспитания», мы должны признать, что это замечательный памятник педагогической мысли, исключительно богатый содержанием и отражающий многосторонний мир интересов Лобачевского.

Лобачевский подчеркивал общественную роль образования, он стремился увлечь студента патриотическим идеалом ученого-гражданина, который «высокими познаниями составляет честь и славу своего отечества». Но образование не должно ограничиваться приобретением специальных научных знаний. Лобачевский ставит требование воспитания всесторонне развитой личности. При этом никакие способности не должны быть подавлены, а, наоборот, развиты и усовершенствованы; специальная подготовка должна гармонически сочетаться с общим развитием и с освоением эстетической и этической культуры.

Изложенные в речи взгляды на преподавание и воспитание выработаны Лобачевским, конечно, прежде всего на основе его личного, уже весьма значительного к 1828 г. опыта. Студент Лобачевский с увлечением овладевал физико-математическими науками и настойчиво развивал свои способности в соревновании с товарищами. Его блестящие успехи не раз были отмечены учителями, но вместе с тем он перенес и немало неприятностей, вызванных формальными и бездушными методами воспитания, применявшимися администрацией. Затем на протяжении четырнадцати лет он приобрел богатый опыт многообразного преподавания (раздел IV) и научно-общественной работы в университете (раздел I).

Очевидно, что определенное влияние на его педагогические взгляды оказали и его учителя по университету — профессора М. Х. Бартельс и Ф. К. Броннер. Броннер особенно, так как много сил и внимания им уделялось воспитанию студентов и магистров университета, педагогической работой которых он руководил.

Несомненно, что речь Н. И. Лобачевского является ярким и замечательным произведением русской педагогической мысли. Написанная несколько торжественным, но выразительным и сжатым языком, она и в наши дни читается с увлечением благодаря богатству выраженных в ней чувств и мыслей.

IV. ЛОБАЧЕВСКИЙ — ПРЕПОДАВАТЕЛЬ УНИВЕРСИТЕТА

Самостоятельное чтение лекций в университете Н. И. Лобачевский начал с осени 1814 г. после утверждения его в звании адъюнкта и преподавал на протяжении тридцати лет. До этого, в годы своего магистерства, он разъяснял студентам лекции Бартельса и проводил занятия по арифметике и геометрии с чиновниками. Лобачевский сначала читал лекции по математическим дисциплинам, а потом и по другим предметам: по аналитической механике, по математической и опытной физике и по астрономии.

Со всей страстностью своей натуры он углублялся в преподаваемый им предмет, знакомился с классической и учебной литературой, с научными журналами. Он строил курс лекций оригинально, подвергая материал самостоятельной переработке, обращая особое внимание на исходные положения науки.

В научной работе Лобачевский не ограничился одной математикой (раздел V). С помощью математических методов он стремился проникнуть в сущность физических явлений, в законы строения Вселенной. Еще в студенческие и магистерские годы он занимался астрономией (его наблюдения кометы в 1811 г. были опубликованы) и механикой (по отзыву Бартельса, он при изучении «небесной механики» Лапласа сумел обогатить этот труд собственными идеями). В 1823 и 1828 гг. были опубликованы две его научно-популярные статьи по акустике. Он был занят постройкой метеорологической обсерватории, а затем ряд лет наблюдениями за температурой почвы, для чего оборудовал специальный колодец. В 1842 г. он участвовал в экспедиции в г. Пензу для наблюдения полного солнечного затмения. В период преподавания физики он закупал аппаратуру, налаживал ее изготовление, ставил опыты. Нет сомнений, что определенную роль в переключениях его преподавания на те или иные предметы играли и внешние обстоятельства, а именно временные или окончательные отъезды профессоров Симонова, Броннера, Бартельса и Купфера. Но без достаточного интереса и эрудиции он, конечно, не взял бы на себя новые педагогические обязанности.

Рассмотрим кратко в хронологическом порядке, какие предметы читал Н. И. Лобачевский. В 1814/15 учебном году — теорию чисел (по Лежандру и Гауссу) и плоскую тригонометрию. Затем ему поручают обзорный курс элементарной математики (для студентов первого и второго года обучения): в 1815/16 учебном году он читает арифметику и алгебру, а в 1816/17 — логарифмы и геометрию. В следующем, 1817/18 учебном году преподает плоскую и сферическую тригонометрию, а затем в 1818/19 высшую математику: дифференциальное и начала интегрального исчисления.

Из-за отъезда Симонова в антарктическую экспедицию он с 1819 г. преподает в течение четырех лет астрономию. В эти же годы Броннер уезжает на родину в Швейцарию, и Лобачевский в течение пяти лет преподает физику. Через пять лет уезжает новый профессор физики Купфер, и Лобачевский опять преподает физику. Но и впоследствии его интерес к физике не ослабевает: в 1838—1840 гг. он читает цикл научно-популярных лекций по физике, привлекших большое число слушателей. Вместе с тем он не прекращает, за исключением трех лет, чтения лекций по математическим дисциплинам, преподает в разные годы аналитическую и начертательную геометрию, приложения дифференциального и интегрального исчислений к геометрии, а также к механике и затем вариационное исчисление. С 1825 г. он читает лекции по обширному курсу аналитической и практической механики (четыре года), по гидростатике и гидравлике (восемь лет). Чтение математических курсов, после перерыва в 1829—1833 учебных годах, вызванного преподаванием физики и механики, Лобачевский продолжал до конца своей педагогической деятельности, причем на II и III курсах он читал интегральное исчисление (сюда входили и дифференциальные уравнения), а на III и IV курсах — уравнения в частных производных и вариационное исчисление.

Лобачевский стремился в своих лекциях излагать материал доступно. При этом он никогда не допускал в научных рассуждениях религиозных и ханжеских вставок, которые тогда нередко появлялись под давлением Магницкого у многих профессоров (например, у Г. Б. Никольского и даже у И. М. Симонова).

Взгляды Лобачевского на задачи университетского образования изложены им в 1836 г. в записке, поданной министру. О процессе развития студента, о превращении его в ученого и просветителя он писал так: «Воспитанник, выбрав какой-нибудь род занятий более по своим способностям, следуя природной наклонности, упражняет отличительные свои дарования и, наконец, украсив их общими понятиями о других науках, посвящает себя тому предмету, которому должен быть уже навсегда предан, как любимому занятию в жизни и с тем, чтобы оставаться в числе ученых, в числе представителей просвещения по всему государству, во всех его сословиях и званиях».

В этих словах отражены как личные моменты из юности великого ученого, так и те установки, которыми он сам руководствовался как ректор и преподаватель, стремясь вырастить деятелей науки и просвещения из талантливой молодежи «во всех... сословиях и званиях», что резко противоречило дворянскому сословному подходу к образованию.

В своих лекциях Лобачевский использовал передовой в те годы опыт преподавания физико-математических наук французской научной Политехнической школы, рекомендуя учебные руководства Монжа, Лакруа и др., а также труды классиков (Даламбер, Лагранж, Лаплас, Лежандр, Гаусс) и новейшую в те годы математическую литературу (Фурье, Коши, Френель, Пуассон, Ампер и др.). При этом он всегда проявлял самостоятельность, оригинальность, строил курс по своему плану. Он обычно не пользовался каким-либо одним руководством, а читал лекции, как тогда говорили, «по своим тетрадям». При этом характерной чертой являлось его стремление добиться особой четкости в началах науки.

Метод преподавания Лобачевского и его отдельные своеобразные приемы, представляющиеся и теперь ценными и передовыми, обрисованы в воспоминаниях его ученика и преемника по кафедре А. Ф. Попова [4]:

«...профессор Лобачевский умел быть глубокомысленным или увлекательным, смотря по предмету изложения. Между тем как в сочинениях своих он отличался слогом сжатым и не всегда ясным, в аудитории он заботился об изложении со всею ясностью, решая сначала задачи по способу синтетическому, а потом доказывая общие предложения по способу аналитическому. Он мало заботился о механизме счета, но всего более о точности понятия. Он чертил на доске не скоро, старательно, формулы писал красиво, дабы воображение слушателя воспроизводило с удовольствием предметы преподавания; любил более сам учить, нежели излагать по авторам, предоставляя слушателям самим познакомиться с подробностями ученой литературы».

Механического заучивания Лобачевский не одобрял и иногда с неудовольствием останавливал на экзамене студента, заполнявшего формулами всю доску. Зато ему часто было достаточно ответа в нескольких словах. Он требовал безукоризненной точности выражений и особенно ценил способность самостоятельного суждения.

Так как Н. И. Лобачевский не публиковал статей на педагогические темы, то его методологические и педагогические воззрения не получили широкой известности. Однако практически они оказывали большое воздействие на преподавание в Казанском университете, причем не только в течение его тридцатилетней педагогической деятельности, но и позднее, так как по запискам Лобачевского читали лекции по математике и механике многие молодые преподаватели. Поэтому не только ректорская, но и педагогическая деятельность Лобачевского сыграла большую роль в повышении уровня преподавания, в преобразовании небольшого, неразвитого Казанского университета в один из лучших университетов России.

V. НАУЧНЫЕ ТРУДЫ, НЕ ОТНОСЯЩИЕСЯ К НОВОЙ ГЕОМЕТРИИ. ВЗГЛЯДЫ ЛОБАЧЕВСКОГО НА РОЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ИССЛЕДОВАНИИ ПРИРОДЫ

Научные интересы Лобачевского в области физико-математических наук были весьма широки. Его научные исследования не исчерпываются работами по новой геометрии. В различные годы, кроме математических курсов, он вел также преподавание механики, физики и астрономии (раздел IV). Лобачевский был глубоко осведомлен в этих науках, внимательно следил за современной научной литературой, и ему принадлежат несколько статей, относящихся к этим наукам: две статьи об акустическом резонансе (1823, 1828), примечания к статье А. Купфера «О температуре почвы», «Исследование о движении твердого тела» (1834), «Отчет о наблюдении полного затмения Солнца» (1842) (в этом отчете он высказал ценные мысли о необходимости сочетать волновую и корпускулярную теории света) и «Разбор докторской диссертации А. Ф. Попова об уравнениях гидродинамики» (1845).

В дальнейшем мы коснемся содержания только математических его трудов.

Помимо разработки своей «воображаемой» геометрии, он оригинально вводит самые первые основные геометрические понятия. Мы уже упоминали, что он критиковал Евклида за то, что тот принимал в качестве исходных такие абстрактные понятия, как «точка», «линия» и «поверхность». В соответствии со своими материалистическими воззрениями на мир, на природу Лобачевский полагал, что начальные понятия должны быть более близки к непосредственно воспринимаемым нами объектам, к материальным телам. Они должны быть «приобретенными» с помощью наших чувств, и, только опираясь на эти первые понятия, следует вводить более отвлеченные «произведенные» понятия, так сказать, абстракции второй ступени.

С помощью неопределяемого исходного понятия «прикосновение» он вводит понятие геометрического тела (когда от материального тела сохранено только понятие «прикосновение»). Затем рассматривает разные типы разделений тела на части (или сечений), в том числе два важнейших: поступательное и обращательное (или накрест). Соответственно этому прикосновение получается поверхностное или линейное.

В случае, когда имеются три главных сечения тела и оно тогда разделяется на восемь частей, две части на противоположных сторонах имеют точечное прикосновение. Если у двух тел, имеющих поверхностное прикосновение, отбросить части, не касающиеся в одном теле другого, то получим поверхность. Аналогично определяются линия и точка. Введя расстояние как относительное положение двух точек, Лобачевский дает определение сферы, далее плоскости (с помощью двух семейств концентрических сфер), окружности и, наконец, прямой (с помощью двух семейств концентрических окружностей на плоскости).

Аксиоматический метод еще не был тогда достаточно разработан, он сложился лишь после и в значительной степени на основе появления неевклидовых геометрий (раздел X), поэтому в этой оригинальной попытке приблизить начальные понятия к природе имеется ряд неясностей и пробелов. Вместе с тем это была попытка ввести в качестве начальных некоторые топологические понятия, что свидетельствует о положительных сторонах этого стремления — дойти до самых глубин, до изначальных основ геометрии. Лобачевский полагал, что если приблизить начала геометрии к самой природе, то затем все выводы, полученные силой логического суждения, не смогут отклоняться от действительности, так как в разуме «как бы отпечатались первые действующие причины вселенной, которые соглашают ... все наши заключения с явлениями в природе» (раздел III).

Этот интерес к самым начальным математическим понятиям, к поискам усовершенствования начал проявился и в его работах по математическому анализу и алгебре.

Он опубликовал три работы по исследованию сходимости бесконечных рядов (1834, 1835, 1841). Отметим, что работа 1841 г. получила, так же как и ранее представленный в 1832 г. его геометрический труд, отрицательный отзыв у академика М. В. Остроградского, рассмотревшего ее по поручению и министра и президента Академии наук. Судя по этим работам, можно сказать, что Лобачевский занимался актуальными проблемами своего времени и проявил себя как исследователь принципиальных вопросов в области анализа. Он отчетливо разграничил понятие непрерывности и дифференцируемости, показал глубокое понимание точного смысла понятия «функция», а в своих доказательствах пользовался введенным в науку позднее понятием равномерной непрерывности. Он нашел новый признак сходимости знакоположительных рядов, доказал при весьма общих условиях теорему о разложении функции в ряд Фурье и получил некоторые результаты, предвосхищавшие дальнейшее развитие математического анализа.

Одна из его работ относится к теории вероятностей (1842). В ней исследована вероятность средних результатов, полученных из повторных наблюдений, иначе говоря, найден закон распределения среднего арифметического взаимно независимых равномерно распределенных случайных величин. Эти результаты, как отметил академик А. Н. Колмогоров, представляют интерес и в настоящее время.

В области алгебры Лобачевскому принадлежит статья о понижении степени двучленного уравнения (1834) и большое учебное пособие для учителей гимназии и студентов «Алгебра или вычисление конечных», напечатанное тоже в 1834 г. в типографии университета.

Первоначально Лобачевским была задумана и подготовлена еще в 1823 г. учебная книга по алгебре для гимназии (он сам вел преподавание в гимназии). Рукопись в окончательном виде была представлена на факультет в августе 1824 г. для напечатания на казенный счет и введения ее в гимназиях. Однако по разным причинам (задержка одного отзыва, наступление событий 1825 г. и др.) она не была издана. Осенью 1826 г. Лобачевский взял рукопись обратно, выразив сожаление о напрасно затраченном труде. Эта рукопись, однако, сохранилась и находится в библиотеке геометрического кабинета Казанского университета. Она опубликована. «Алгебра», изданная в 1834 г., представляет собою результат переработки первоначального текста учебника и внесения существенных дополнений к нему, относящихся уже к высшей алгебре. По существу это первый русский учебник высшей алгебры. Помимо своеобразного изложения известного материала и некоторых усовершенствований в доказательствах, он включает ряд совершенно оригинальных результатов.

Алгебра рассматривается Лобачевским как предварительное введение в математический анализ, как наука о конечном (хотя он и применяет здесь бесконечные ряды). И прежде всего алгебра «предписывает правила для счета всех чисел». В соответствии с этой последней установкой, близкой к современной, первые восемь глав книги посвящены операциям с целыми и дробными числами и исследованию их свойств. Далее рассмотрены системы уравнений первой степени, а также решения их в целых числах; затем — степени и корни, включая операции с комплексными числами; логарифмы, их свойства и составление логарифмических таблиц (с помощью рядов); аналитическое введение тригонометрических функций; конечные разности и формулы суммирования (некоторые оригинальные); двучленные уравнения и «всякие» (т. е. высших степеней) алгебраические уравнения. В книге всего семнадцать глав, причем последняя глава, возможно наиболее интересная, составляет почти одну треть книги.

Мы отметим наиболее оригинальные черты этой книги. В ней особое внимание уделено операциям над числами и их свойствам. Далее здесь изложен способ введения определителей, возникающих при решении систем, очень близкий к современному (определители здесь появляются в учебной литературе впервые). Затем следует отметить чисто аналитическое введение тригонометрических функций. Это объясняется тем, что Лобачевскому важно было показать, что они могут быть определены независимо от евклидовой геометрии. Приведен оригинальный метод, позволяющий понижать степень некоторых видов двучленных уравнений. Наконец, в последней главе дан новый метод приближенного решения алгебраических уравнений. Впоследствии он получил несправедливо название способа Греффе, хотя работа последнего вышла в 1837 г. (первый вариант в 1833 г.). Правда, до Лобачевского аналогичный способ был предложен бельгийским математиком Данделеном в его статье в 1826 г. Поэтому, называя этот метод, справедливо будет упоминать имена всех трех ученых: Данделена, Лобачевского и Греффе, разработавших его независимо друг от друга.

Кроме перечисленных выше работ, имеется ряд неопубликованных материалов. В библиотеке геометрического кабинета Казанского университета хранятся студенческие записи лекций Лобачевского за разные годы по арифметике, алгебре, геометрии, дифференциальному исчислению, дифференциальным уравнениям и механике. Имеется также большая «Записная книга» (или «тетрадь Лобачевского»), заполненная мелко написанными рукой Лобачевского математическими текстами и начатая, по-видимому, в 1821 г. В ней находятся выписки из научной литературы, расчеты, связанные с подготовкой к лекциям, и самостоятельные исследования, преимущественно по алгебре (все без объяснений). Кроме того, в библиотеке хранятся несколько десятков отдельных листочков с заметками по физике, механике, астрономии, математике, а также и другого рода, написанных тоже рукой Лобачевского (в частности, конспективное изложение формальной логики). Это черновые выкладки, отрывки из конспектов лекций для студентов, фрагменты самостоятельных исследований, копии стихотворений и т. п. Все эти материалы (или их описания), а также учебные планы и программы («Обозрения преподаваний» Лобачевского) опубликованы в книге [3].

Широкий круг физико-математических научных интересов Лобачевского, нашедший отражение в его научной и педагогической деятельности, способствовал выработке у него целостного материалистического мировоззрения и позволил ему высказать имеющие важное значение мысли о роли математического метода в исследовании природы.

Так, построение новой математической теории, какой являлась система «воображаемой геометрии», рассматривалось им как новая возможность более глубокого проникновения в закономерности объективного мира. В соответствии с этим он проверял с помощью данных астрономических наблюдений применимость своей геометрии в физическом пространстве. Однако, убедившись, что евклидова геометрия практически достаточно точна, и показав, как можно применить новую геометрию в математическом анализе, он как материалист высказывает уверенность, что его геометрия в дальнейшем еще потребуется либо «в тесной сфере молекулярных «притяжений», либо «за пределами видимого мира», т. е. при расширении доступных изучению протяжений космоса, что в определенном смысле уже подтвердилось в наше время (раздел XII). Известны также его замечательные высказывания о неразрывных связях между движущейся материей и свойствами пространства. Эти связи получили конкретное выражение лишь после создания А. Эйнштейном частной (1905) и общей (1916) теорий относительности (раздел XI). Лобачевский писал: «В природе мы познаем собственно только движение, без которого чувственные впечатления невозможны. Итак, все прочие понятия, например геометрические, произведены нашим умом искусственно, будучи взяты в свойствах движения, а потому пространство само собой, отдельно, для нас не существует... Силы все производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы».

От математической науки Лобачевский требует, «чтобы она стояла на твердом основании, чтобы строгость и ясность сохранились в самых ее началах, так как они делаются первым ее достоинством в продолжении». Он четко высказывается против идеалистической трактовки начал математики. «В основу математических наук могут быть приняты все понятия, каковы бы они ни были, приобретенные из природы». Так, в геометрии он предложил принять в качестве исходного понятия «прикосновение» и, опираясь на него, ввести понятие геометрического тела. Он был твердо убежден, что «все математические начала, которые думают произвести из самого разума, независимо от вещей мира, останутся бесполезными для математики». В виде примера таких бесполезных начал приведены актуальные бесконечно малые, основания учения о движении Канта, принцип разнородности линий с углами (т. е. требование существования подобных фигур), сравнение бесконечных площадей и др.

Он дает сжатую характеристику дедуктивного построения физико-математических наук: «... в начале их полагаются те понятия, откуда производится все учение силой нашего суждения».

Однако, по Лобачевскому, логический вывод — это совсем не субъективное построение, поскольку в нем отражены закономерности и связи объективного мира. Так, в своей речи в 1828 г. он сказал, что в началах суждения, т. е. в законах логики, «как бы отпечатались первые действующие причины вселенной, которые и соглашают, таким образом, все наши заключения с явлениями в природе». Это высказывание близко известному высказыванию Ф. Энгельса о познаваемости мира, поскольку мышление и познание — продукт мозга, а мозг — продукт и часть природы.

Лобачевский высоко оценивает успехи физико-математических наук, называя их «славой нынешних веков, торжеством ума человеческого». Эти успехи «справедливо удивляют нас, заставляют признаться, что уму человеческому предоставлено исключительно познавать сего рода истины. Надобно согласиться и с тем, что математики открыли прямые средства к приобретению познаний».

Высоко оценивая вклад Декарта, он отмечает, что «мы живем уже в такие времена, когда едва тень древней схоластики бродит по университетам... Здесь учат тому, что на самом деле существует, а не тому, что изобретено одним праздным умом».

В этих высказываниях ясно проступает крайне отрицательное отношение Лобачевского к некоторым, имевшим в то время место попыткам псевдонаучных натурфилософских построений с помощью надуманных метафизических принципов и к современной ему идеалистической философии, преподаваемой в университетах. В другом месте он прямо подчеркивал, что напрасно было бы искать решение трудностей построения математической науки в философии (подразумевая, конечно, современную ему кантианскую философию и особенно шеллингианскую натурфилософию, которая бралась за решение проблем всех естественных наук): «Нахожу также бесполезным ... искать к ним ключа в философии. Математика должна быть совершенно независима от сей науки».

Лобачевский справедливо указывает, что возможность использования математических методов в какой-либо из наук о природе — это свидетельство ее зрелости, когда качественное описание — пройденный этап, когда уже выявлены понятия и связи, достаточно общие и определенные. «Все естественные науки силятся встать на ту высокую ступень совершенства, на которой последует их соединение с математикой; и со времени сего соединения их успехи пойдут быстрыми шагами вперед. Это случилось уже с физикой, в недавнее время с минералогией и есть надежда того же ожидать для всей химии» ... «Всему основанием служит справедливое понятие о вещах, которое не оставляет вести Математика через все его вычисления. После чего нет уже явлений природы, которых бы он не мог изъяснить; нет явлений, в которых бы он не мог предсказать и определить с точностью и время и меру». И далее он особо подчеркивает, что без математики наука не сможет проникнуть достаточно глубоко в сущность изучаемых явлений. «Но то, однако ж, правда, что ум, приученный к вычислениям, далеко продолжает идти за ту границу, которую не переступит ум, не посвященный в таинства науки чисел». Так ярко он выразил фундаментальное значение математического метода в исследовании природы в своей научно-популярной статье «Происхождение и распространение звука в воздухе», опубликованной в 1823 г., т. е. еще до создания им новой геометрии.

VI. ЛОБАЧЕВСКИЙ — РЕКТОР И СТРОИТЕЛЬ УНИВЕРСИТЕТА. БИБЛИОТЕКА. РУКОВОДСТВО ШКОЛАМИ. ЛОБАЧЕВСКИЙ И СТУДЕНТЫ

Обстоятельства, при которых Лобачевский был избран 3 мая 1827 г. ректором университета, изложены в разделе III. Там же были освещены его взгляды на общественный долг ученого, на многообразные цели, которые должно ставить перед собой университетское образование.

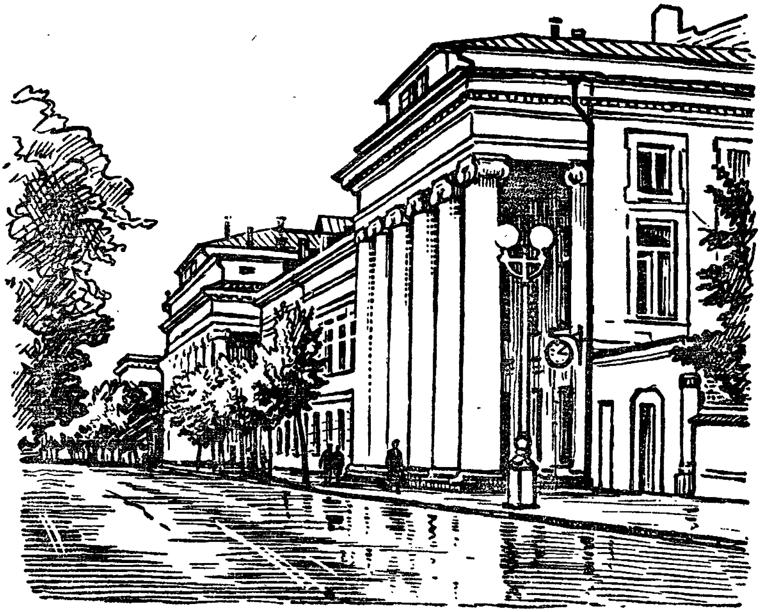
После выборов Лобачевский с неиссякаемой энергией принялся за дела по улучшению университета. Вот что он писал 1 сентября 1827 г. новому попечителю М. Н. Мусину-Пушкину: «Сперва по предположению только, а теперь по собственному опыту могу сказать, что должность ректора огромна... Я уверен, что Вы не примете слова мои, будто я хочу увеличить в Ваших глазах мои труды. Не хочу также слишком мало и на себя надеяться. Наконец, мой нрав не таков и правила, чтобы унывать и раскаиваться, когда нельзя помочь чему. Простительным мне кажется робеть, когда еще надобно решиться, но когда дело решено, то не надобно падать духом. Так Вы заметили без сомнения, сколько я колебался и искал даже уклониться; теперь хочу быть твердым и стараться всеми силами».

Почти двадцать лет стоял Лобачевский во главе университета (1827—1846), неизменно переизбираясь советом на очередные сроки. За эти годы он добился подлинного расцвета Казанского университета, оказавшегося в предыдущие годы в очень тяжелом положении.

Семь лет попечительства Магницкого привели к печальным последствиям. Уровень преподавания (особенно на гуманитарных факультетах) упал, многие кафедры после увольнения ряда профессоров оставались незамещенными, число студентов резко сократилось. Правда, материальная часть была несколько улучшена. Университет получил собственное здание (строительство главного корпуса было закончено в 1825 г.), Лобачевский и Симонов закупили физическое и астрономическое оборудование, но перспектив к плодотворному развитию научно-учебной деятельности не было.

Ректорство Лобачевского внесло коренные изменения в жизнь университета. Его энергичная целенаправленная деятельность привела к тому, что, несмотря на военно-дворянские реакционные установки николаевского режима, Казанский университет стал развиваться, расширяться и превратился в одно из лучших научно-учебных заведений России, профессорско-преподавательский состав которого представлял широкий круг наук.

Коснемся хотя бы кратко отдельных сторон деятельности Лобачевского-ректора. Прежде всего это строительство. Лобачевский прекрасно понимал, что один учебный корпус без надлежаще оборудованных научно-вспомогательных заведений недостаточен для развития подлинной науки и для подготовки знающих специалистов. С 1832 по 1842 г., при самом непосредственном участии Лобачевского, было проведено строительство замечательного ансамбля научно-учебных заведений уни-

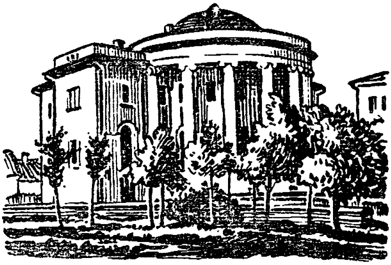


Главный корпус Казанского университета

верситета. Причем сам Лобачевский нередко вникал во все детали строительной техники и даже в качество строительных материалов. Были возведены следующие здания: анатомический театр (с классической колоннадой), корпус химических лабораторий и физического кабинета, астрономическая обсерватория (оригинально задумана совместно с И. М. Симоновым), библиотека (с прекрасным величественным светлым читальным залом, имеющим сводчатый потолок), и, наконец, перед главным корпусом — большое здание клиник.

Таким образом, на университетском участке возник один из самых гармоничных и красивых архитектурных ансамблей научных зданий, отразивших строгий стиль русского классицизма первой половины XIX в.

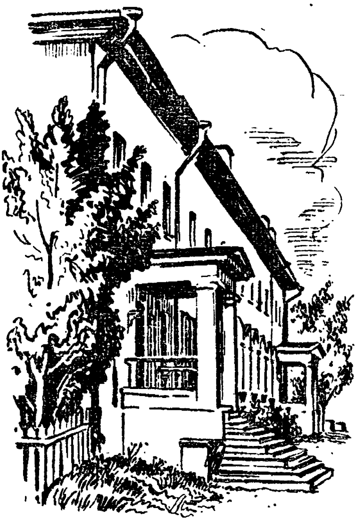
Постоянное внимание Лобачевский уделял подготовке молодых ученых. Наиболее способных студентов университета посылали в важнейшие научно-учебные заведения России (Медико-хирургическая академия, Дерптский университет и др.) для подготовки к профессорскому званию или направляли для совершенствования за границу. Лобачевский принимал самое непосредственное участие в расширении «восточного разряда» университета, т. е. факультета востоковедения. Он понимал всю важность



Анатомический театр университета

развивающихся связей России с государствами Востока и необходимость изучения истории, культуры и языков восточных народов. Для подготовки специалистов университет отправляет несколько воспитанников в длительные путешествия по Монголии, Китаю, Персии и Египту. Так, на пять лет в Забайкалье и Бурят-Монголию были отправлены О. М. Ковалевский и А. В. Попов. Из своей поездки они привезли много рукописных книг, в 1833 г. была открыта кафедра монгольского языка. Через четыре года открывается кафедра китайского языка, и воспитанник университета В. П. Васильев (впоследствии академик, профессор Петербургского университета), изучив этот язык, отправляется в 1840 г. в десятилетнее путешествие по Китаю. Он высылает оттуда ценнейшие рукописи. Вернувшись, Васильев защищает докторскую диссертацию. Уже в 1828 г. кафедра восточных языков была разделена по предложению Лобачевского на две: арабо-персидскую и турецко-татарскую. Воспитанник университета И. Н. Березин после защиты магистерской диссертации отправляется в 1841 г. в трехгодичное путешествие по Персии, Сирии, Египту и Турции. Затем он знакомится с наречиями сибирских татар и с 1846 г. является экстраординарным профессором второй из упомянутых кафедр. В 1842 г. открываются кафедры армянского и санскритского языков. Типография обеспечивается шрифтами для печатания книг на восточных языках. «Восточный разряд» достигает полного развития, и Казанский университет становится одним из важнейших центров востоковедения[1].

[1] В 1854 г. «восточный разряд» был закрыт по решению правительства. В следующем году был открыт восточный факультет в столичном университете, куда и были переведены преподаватели и перемещено все ценнейшее собрание рукописей.

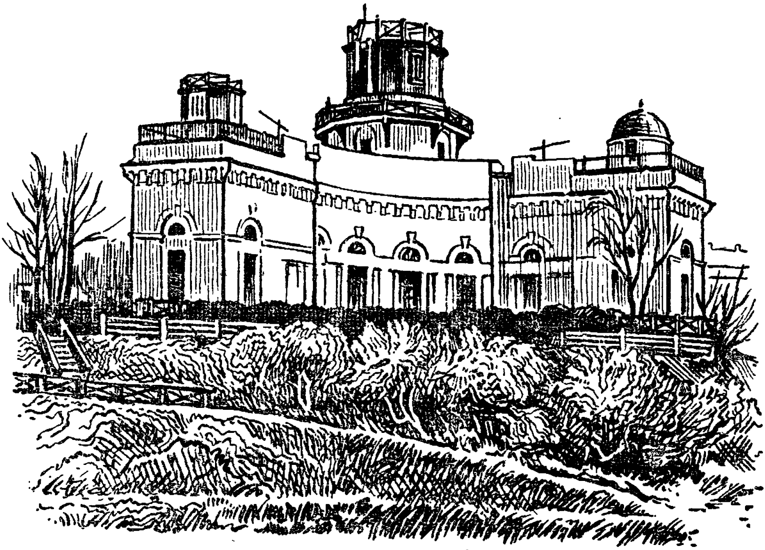


Здание химических лабораторий и физического кабинета университета

Кафедры, кабинеты и лаборатории университета снабжались в период ректорства Лобачевского многочисленными приборами и учебными пособиями. Убедившись в невозможности найти все необходимые приборы и инструменты в готовом виде, он приходит к мысли организовать мастерскую точной механики и выписывает в 1829 г. из Мюнхена вместе с оборудованием и руководителя мастерской — мастера высокой квалификации Ф. Нея, который вполне оправдал его надежды.

Значительную роль в развитии научных исследований сыграли научные экспедиции, организации которых Лобачевский всегда содействовал. О поездках молодых ученых в страны Востока уже было упомянуто. Сам Лобачевский (совместно с Э. А. Кнорром и М. В. Ляпуновым) участвовал в 1842 г. в экспедиции в Пензу для наблюдения полного солнечного затмения. В 1828 г. Симонов провел определение географического положения ряда волжских и камских городов (в том числе: Казани, Симбирска, Самары, Чистополя). Э. А. Эверсман совершил путешествие по Оренбургскому краю и ряд других путешествий. Его «Описание бабочек» перевел с немецкого языка на русский сам Лобачевский. П. И. Вагнер с 1843 по 1846 г. провел ряд геологических изысканий. А. Я. Купфер совершил в 1828 г. поездку на Урал для магнитных, геологических, минералогических и метеорологических наблюдений. К его статье «О средней температуре воздуха и почвы» Лобачевский написал ценные, иногда полемизирующие с авторским текстом примечания.

Лобачевскому университет обязан и созданием «Ученых записок Казанского университета» — строгого научного журнала, заменившего в 1834 г. журнал смешанно-



Астрономическая обсерватория университета

го содержания «Казанский вестник». Лобачевский добивался разрешения открыть новый журнал с начала своего ректорства. Первая книга «Ученых записок Казанского университета» начиналась его статьей, в которой была обрисована роль печатных изданий для распространения «образованности» и развития науки, высказывалась критика в адрес прежних университетских изданий и цели нового издания: «Ученые записки» будут уж заключать одни подлинные сочинения, исследования... и новые наблюдения». «Членам университета принадлежит трудиться собственно для наук и ожидать награды в своей известности, в ученой славе»,— писал Лобачевский. В этом журнале публиковались затем все важнейшие труды Лобачевского.

Лобачевский пытался также добиться разрешения в министерстве открыть при университете «Общество любителей наук», которое могло бы объединить всю интеллигенцию города, но, несмотря на поддержку попечителя, получил отказ.

Особое внимание в своей деятельности Лобачевский уделял университетской библиотеке. Ее необходимо было привести в порядок, учесть имеющиеся фонды и попол-

УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ,

ИЗДАВАЕМЫЯ

ИМПЕРАТОРСКИМЪ

КАЗАНСКИМЪ УНИВЕРСИТЕТОМЪ.

1834.

КНИЖКА I.

КАЗАНЬ.

Въ Университетской типографіи

1834 г.

Титульный лист и предисловие Лобачевского к первой книге

ПРЕДИСЛОВІЕ

Печатанію. какъ будто второму дару слова новѣйшія времена обязаны самой большой частію своей образованности Если науки такъ удачно и во многихъ отношеніяхъ сравнены со свѣтомъ, который открываетъ глазамъ до того невидимые въ темнотѣ предметы. то сходство сдѣлалось еще совершеннѣе, когда тиснѣніе книгъ позволило съ такой быстротой распространять наши познанія. Вечеромъ родившаяся мысль въ умѣ одного человѣка, утромъ повторяется тысячи разъ на бумагѣ и разглашается потомъ во всѣ концы обитаемой земли. Такъ искра, вспыхнувши въ одной точкѣ, проливаетъ лучи мгновенно и далеко въ окружности. Такъ свѣтъ ума, подобіе дневнаго свѣта, разширяется и силится освѣщать. Такъ люди, преданные наукамъ, не могутъ противиться желанію писать, печатать свои открытія, свои мнѣнія и толкованія.

Это побужденіе произвело наконецъ повременныя изданія, которыхъ появленіе служитъ признакомъ, а число мѣрою просвѣще-

«Ученых записок Казанского университета» (1834) нить новой научной физико-математической литературой. Для отбора и закупки книг (а также физических приборов) он специально ездил в 1821—1822 гг. в столицу. С 1825 по 1835 г. Лобачевский возглавляет библиотеку, совмещая эти обязанности с обязанностями ректора[1]. Он организует составление полного систематического каталога. При нем был открыт свободный доступ в библиотеку для населения. Он добивается существенного расширения книжных фондов, выписывает для библиотеки основные русские и иностранные научные и общественно-политические журналы, а также газеты. Организует обмен изданиями с рядом академий и научных обществ. При выборе книг для комплектования библиотеки он предлагал руководствоваться следующими требованиями: «Сочинения должны быть фундаментальными, содержащими открытия, приведенные в систему. Они должны быть новейшими и пополняющими недостатки других, уже признанных полезными, находящихся в библиотеке. И чтобы главной целью была польза для преподавания наук». Лобачевский высоко ценил художественную литературу.

Особенно ярко проявилась забота Лобачевского об университете во время двух стихийных бедствий, обрушившихся на Казань. В сентябре 1830 г. эпидемия холеры достигла Казани, и город был оцеплен как зараженный. Ужас охватил жителей. Лобачевский еще в августе отправлял врачей на борьбу с холерой в соседние губернии, а теперь болезнь проявилась в самом городе. По его распоряжению весь квартал университета вместе с пожелавшими там остаться преподавателями, студентами и обслуживающим персоналом был изолирован, все входы заперты и оставлен только один, через который дежурный и часовой могли впустить только врачей или священника. Люди, посылаемые в город (в пропитанной дегтем одежде), размещались в отдельном здании. Вода, съестные припасы доставлялись одними лицами, а забирали их уже другие. Были подготовлены две отдельные больницы. Вещи, поступавшие извне, омывались хлориновым раствором, письма окуривались. Одежда заболевших сжигалась.

---

[1] В память о его обширной библиотечной деятельности Научной библиотеке Казанского университета присвоено в 1953 г. имя Н. И. Лобачевского.

Эти меры оказались действенными. Из 80 студентов ни один не заболел, из прочих 480 человек заболело 12, причем умерло двое (в том числе экстраординарный профессор С. А. Протасов). Одна современница в ноябре 1830 г. писала: «Лобачевский во время холеры твердостью духа и попечениями заслужил всеобщую любовь...» С холерной эпидемией, только более слабой, ему пришлось бороться и на следующий год.

Второе бедствие — это страшный пожар, начавшийся 24 августа 1842 г. В этот день был сильный ветер, и огонь, вспыхнувший на Проломной улице (ныне ул. Баумана), стал быстро распространяться в северо-восточном направлении. Горящие головни ветер относил на громадные расстояния. Сгорело более 1300 домов и 9 церквей.

Защитой университетских зданий руководили Лобачевский и Мусин-Пушкин. Огонь подступил к магнитной обсерватории, к библиотеке, к астрономической обсерватории и ректорской квартире. Часть ценных книг с помощью студентов была вынесена на Арское поле. Обе обсерватории сгорели, причем едва удалось спасти важнейшие астрономические инструменты. Библиотеку отстояли от огня, и все книги уцелели. Но ректорская квартира сгорела, погорел и дом жены, и Лобачевскому пришлось год жить в квартире, предоставленной ему купцом А. Ф. Крупенниковым, в доме, расположенном против главного корпуса университета. Остальные здания университета почти не пострадали от огня.

Деятельность Лобачевского, направленная на развитие университета, была интенсивной, многосторонней и плодотворной. Немало сил и внимания он уделял также работе училищ и гимназий учебного округа[1]. Он проявил себя как выдающийся деятель народного образования. Эта сторона его трудов была достаточно полно освещена на основе изучения обширных архивных материалов лишь в последние годы в исследованиях Б. В. Болгарского, Э. Д. Днепрова, В. М. Нагаевой, Т. В. Шуртаковой, П. Ф. Якунина и других.

Руководя школьным образованием, Лобачевский осуществлял свои передовые просветительные идеалы — не-

---

[1] Казанский учебный округ был весьма обширен и охватывал в эти годы следующие губернии: Казанскую, Нижегородскую, Симбирскую, Пензенскую, Саратовскую, Вятскую, Пермскую и Оренбургскую.

сти знания и культуру в широкие народные массы вопреки правительственным установкам, требовавшим выполнения сословных ограничений. Он всячески стремился расширить охват населения образованием и настаивал, чтобы в обучении проводилась тесная связь с жизнью.

К началу ректорства, как мы упоминали ранее (раздел III), у Лобачевского выработались свои передовые педагогические взгляды и накопился значительный личный опыт преподавания, в частности в области элементарной математики (раздел IV). Так, кроме летних чтений по арифметике и геометрии для чиновников, он уже провел в университете для студентов I и II курсов три двухгодичных цикла элементарной математики. Кроме того, он составил, подготовил к печати и представил рукописи двух учебников для гимназий: «Геометрия» и «Алгебра», которые остались тогда по разным причинам неопубликованными (раздел I), но в рукописном виде ряд лет использовались преподавателями и в университете и в гимназиях. В предисловии ко второму учебнику он упомянул, между прочим, что в Казанской гимназии уже два года алгебра читается под его руководством, и он восхищен успехами детей. Все это обеспечило ему глубокое понимание как общих вопросов школьного обучения, так и конкретных методических проблем, особенно связанных с преподаванием математики и физики.

Лобачевский сам проводил в различные годы обследования учебных заведений в Нижегородской, Симбирской, Пензенской и Казанской губерниях, делал замечания, давал советы, посылал инструкции. Он внимательно изучал рапорты других обследователей и отчеты директоров, писал на них конкретные заключения и рекомендации. Своими указаниями и советами он стремился вовлечь учителей в работу по постоянному совершенствованию преподавания и требовал от них проявления методической самостоятельности.

Особо следует отметить, что он уделял большое внимание улучшению преподавания родного языка и литературы, критикуя при этом распространенное среди дворянства увлечение французским языком в ущерб русскому. Он подчеркивал важное воспитательное значение этого предмета, ставил задачу привить вкус и любовь к замечательной родной литературе.

Особый интерес и ценность представляют составленные Лобачевским методические советы по предметам его специальности. Так, в 1830 г. он разослал «Наставления учителям математики в гимназиях» и «Инструкцию о преподавании физики в гимназиях».

Он требовал от учителя физики обязательной демонстрации опытов и объяснения физической стороны обыкновенных явлений, особенно полезных в жизненной практике.

При обучении математике в соответствии со своим материалистическим подходом Лобачевский рекомендовал учитывать возрастные особенности детей и начинать обучение на наглядно-осязательной основе (вычисления с помощью счетов и т. п.), соблюдая «постепенное развитие понятий». При этом нельзя допускать, «чтобы изучение на память заменяло суждение», т. е. нужно добиваться сознательного понимания изучаемого материала. Четко сформулированы в этом наставлении и реальные цели обучения математике: «применение к потребностям в нашей жизни и дальнейшее развитие самой науки».

Следует также отметить его высказывание о важной роли общественного воспитания в противовес принятому в дворянских семьях домашнему обучению. Эти мысли высказаны им в предисловии к его «Алгебре» (1824): «Наука почти бесполезная в семействах и весьма важная для государств. Математика требует учения от лица государства. Едва ли не из общественных заведений могут только выходить хорошие Математики, где все благоприятствует этой науке: выбор лучших наставников, которые непрестанно трудятся увеличить собственные свои познания; порядок и строгость, так сказать военные, которые одни только в состоянии принудить учеников следовать неослабно за преподаванием и удерживать в непрестанном напряжении их внимание; наконец, множество учеников, возбуждая соревнование, рождает охоту, превращает ее со временем в страсть и бывает причиною появления гениев-Математиков».

Лобачевский активно содействовал введению школ взаимного обучения ланкастерского типа, которые организовывались по новому уставу 1828 г. В университете было отобрано 22 студента, которые и прошли соответствующую подготовку, чтобы вести затем преподавание в школах взаимного обучения (старшие ученики там учили младших. все это под руководством учителя, многоступенчато, в одной большой комнате, стены которой увешаны соответствующими таблицами и наглядными пособиями). Лобачевский всячески поддерживал распространение этого метода и добивался открытия новых классов взаимного обучения, так как считал, что при недостатке учителей и отдельных школьных помещений это будет способствовать более широкому охвату населения обучением. Казанские училища ланкастерского типа послужили образцом при открытии подобных заведений в других губерниях и округах.

Деятельность Лобачевского по руководству школами заметно активизировалась в 1845—1847 гг., когда он вследствие перевода попечителя в Петербург был временно назначен управляющим округом. Но с 1848 г. она прекращается. По-видимому, новый попечитель Молоствов, назначенный в 1847 г., перестал предоставлять своему помощнику — Н. И. Лобачевскому эту сферу деятельности. Причиной, несомненно, был секретный циркуляр 1848 г., обязывающий попечителя в связи с революционными событиями в Европе обратить особое внимание на дух преподавания, на образ мыслей студентов и воспитанников, на благонадежность наставников и воспитателей. Следовало добиться недопущения в преподавании ничего такого, что могло бы поколебать религиозную веру или убеждение в пользе монархической системы правления; рекомендовалось усилить преподавание закона божия и воспитание верноподданнических чувств.

Очевидно, установки Лобачевского коренным образом противоречили требованиям секретной инструкции, и он был отстранен от руководства школами, как ранее от ректорства.

Но многолетняя напряженная работа Лобачевского по развитию народного образования уже дала свои плоды: повысилось качество преподавания в школах округа, усилилась заинтересованность учителей методической работой, реальной направленностью обучения. Его наставления проводились в жизнь, оказав влияние на его учеников и последователей.

Воспоминания современников и кисть художника сохранили нам образ Лобачевского периода его ректорства. «Николай Иванович был человек высокого роста, худощавый, несколько сутуловатый, с головою почти всегда опущенной вниз, что придавало ему задумчивый вид. ...Глубокий взгляд его темно-серых глаз был постоянно угрюмо задумчив, а сдвинутые брови его расправлялись в очень редкие минуты веселого расположения...» — писал И. П. Вагнер.

Этот же образ мы видим на портрете казанского художника Л. Д. Крюкова (оригинал находится в здании президиума АН СССР в Москве). Портрет относится к 1840—1842 гг. Именно он послужил прототипом для овального портрета, висевшего ранее в актовом зале Казанского университета (в настоящее время этот портрет находится в геометрическом кабинете университета), для известной ксилографии В. Матэ, для бронзового бюста памятника Лобачевскому работы М. Диллон и для многих других изображений великого ученого.

Но под суровой внешностью Лобачевского скрывались доброта, отзывчивость, деликатность, внимательное отношение к учащейся молодежи.

Известно несколько случаев, когда он помогал нуждавшимся молодым людям, стремившимся к науке. Однажды А. Ф. Попов заметил в переезжавшей из города в город книжной лавке одной итальянской фирмы молодого продавца, читающего математическую книгу, и рассказал об этом Лобачевскому. Лобачевский стал содействовать юноше в получении систематического образования, помог устроиться надзирателем в гимназию и руководил его занятиями, и продавец (И. А. Больцани) впоследствии становится магистром (1853), а затем и профессором физики (1859).

Сын бедных родителей, Н. И. Розов пешком пришел из Сибири в Казань, чтобы учиться в университете. Получив поддержку у Лобачевского, он становится студентом, а впоследствии видным медицинским деятелем.

Знаменитый химик Н. Н. Зинин окончил университет по математическому отделению с золотой медалью, и отзыв на его кандидатское сочинение писал Лобачевский, содействовавший и дальнейшему его продвижению.

А. М. Бутлеров, основатель теории строения химических соединений, по окончании университета (1849) тоже получил особую поддержку у Лобачевского (управлявшего тогда временно округом), который не только дал согласие оставить его при университете, но и рекомендовал отправить как особо талантливого для усовершенствования за границу.

Все студенты глубоко уважали Лобачевского, а студенты-математики перед ним просто благоговели. Они знали не только его требовательность на экзаменах, но и его гуманное чуткое отношение к молодежи. Ему приходилось не раз выручать своих воспитанников из сложных положений, добиваться смягчения наказаний, вызывая этим нередко порицание высшего начальства.

Так, в 1849 г. во время одной многолюдной свадьбы на студентов пожаловалась полицейскому теща священника (она их расталкивала, пробираясь вперед, и они ответили ей тем же). Одного студента арестовали, а его друзья потом на улице поколотили этого полицейского и его помощника. Свалка кончилась вызовом конных жандармов. Инспектор, проведя следствие, арестовал многих студентов, и можно было опасаться суровых репрессий. Но Лобачевский, собрав всех студентов, обратился к ним с глубоко продуманной речью и затем объявил свой приговор: трое были исключены на один год, а другие отделались отсидкой в карцере.

С одним хорошо успевающим студентом случилось следующее. Отмечая одобрение своего выпускного сочинения и возвращаясь с другими студентами ночью после пирушки, он, бросив камень, нечаянно разбил окно в церкви около университета. Студент был схвачен полицейским, и его поступок стал рассматриваться как кощунство. Ему грозил не только отказ в звании действительного студента, но и исключение из университета. Лобачевский, за четыре месяца до смерти, больной и ослепший, написал ректору письмо, считая, что будет справедливым и благодетельным сохранить этому юноше звание действительного студента, лишившись которого он пошел бы рядовым на военную службу и не смог бы стать опорой и утешением для своего отца. Юноша вскоре был восстановлен в числе студентов, а осенью утвержден в звании действительного студента.

Другой эпизод связан со студенческими волнениями. Студенты, собравшись, шумно осуждали действия нового попечителя Молоствова, не подчинялись требованиям и уговорам разойтись, хотя и инспектор и ректор (И. М. Симонов) призывали их к этому. Вызвали Н. И. Лобачевского. Он приехал, спокойно вошел в аудиторию и обратился к ним с речью, которая внесла успокоение. Инспектор считал, что зачинщиков необходимо исключить, но Лобачевский счел возможным ограничиться более мягким наказанием, что вызвало серьезное недовольство в министерстве.

VII. СЕМЕЙНАЯ ЖИЗНЬ. УХОД ИЗ УНИВЕРСИТЕТА. ПОСЛЕДНИЕ ГОДЫ ЖИЗНИ

Лобачевский женился поздно, в 1832 г., когда ему шел уже сороковой год. Через жену — Варвару Алексеевну Моисееву — он оказался в родственных связях с попечителем (мать М. Н. Мусина-Пушкина являлась сестрой матери Варвары Алексеевны). Это обстоятельство, несомненно, укрепило его и до того прекрасные служебные отношения с попечителем. Накануне свадьбы он писал И. Е. Великопольскому, брату своей невесты (по матери), что уже теперь волнения за здоровье любимой жены и ожидаемых в будущем детей «бросают густую черную тень на светлые призраки будущей жизни». Эти опасения, как следует из последующего текста, подтвердились.

В качестве приданого Лобачевские получили два небольших имения в отдаленных губерниях и дом в Казани (все это числилось в собственности жены). Имения было решено продать и купить другое, удобно расположенное, т. е. находящееся недалеко от Казани, чтобы можно было непосредственно вести в нем хозяйство. Подходящее имение было подыскано и куплено в 1840 г. Это была расположенная на Волге «Беловолжская слободка» (ныне район поселка Козловка в Чувашской АССР). Купить это имение было нелегко, денег не хватало. Лобачевскому пришлось взять деньги в долг.

В имении он стремился вести хозяйство на научной основе, используя различные технические нововведения. Его воодушевляли мысли о необходимости всемерного развития промышленности и сельского хозяйства в России. Лобачевский стал одним из инициаторов создания Казанского экономического общества (1839) и был активнейшим его членом, а фактически его руководителем. Он участвовал в изучении экономики края, в организации выставок достижений сельского хозяйства и промышленности, делал сообщения о тех или иных усовершенствованиях и новшествах. Неоднократно он высказывался о необходимости введения экономического и профессионального образования, искал пути создания ремесленных и торговых школ не только для купеческих детей, но и для детей бедноты.

В своем имении Лобачевский построил дом и флигель, амбары и каретники, каменную ригу и овчарню. Он разводил породистый скот (за образцы мериносовой шерсти в 1850 г. Лобачевский был награжден на Петербургской выставке серебряной медалью), разбил сад, придумал оригинальные ульи, ввел особую систему травосеяния, построил плотину и водяную мельницу.

Однако его преследовали неудачи, что вызывало злорадные разговоры соседей. Конечно, при крепостных отношениях и сомнительных управляющих (Лобачевский в одном письме писал, что они «обыкновенно бывают люди ни к чему не способные» и, кроме того, «из разбора бессовестных, бесчестных и предосудительного поведения») его рациональные методы ведения хозяйства не могли обеспечить экономический успех. Разорение надвигалось. И. Е. Великопольский, помогавший в 1844 г. продать одно имение, получил за него деньги, но значительную сумму не передал Лобачевским, взяв ее в долг. Будучи страстным игроком и театралом, он вел широкую жизнь в Петербурге и проиграл эти деньги. В итоге и через пять лет его долг оставался неуплаченным, что сильно сказалось на материальных делах Лобачевского. И имение и дом пришлось заложить.

В 1844 г. стало известно, что Мусина-Пушкина переводят в Петербург попечителем Петербургского учебного округа. Лобачевский лишался прочной опоры, так как именно благодаря поддержке попечителя удавалось делать менее заметными все отклонения от официальной политики. Между тем реакционность Николаевского режима усилилась. Жена Лобачевского в письме к Великопольскому от 18 июня 1844 г. обрисовала обеспокоенность Лобачевского складывающимся положением так: «... он готовится службу оставить, сами обстоятельства к тому ведут... При новом порядке дел муж не может оставаться и перейти таким образом в другой период службы, с которым университет скорее может идти назад, нежели вперед».

Было ли здесь выражено намерение Лобачевского самому уйти из университета или опасения вынужденного ухода, не ясно. Полной определенности в этот вопрос не вносят и дальнейшие события.

После отъезда Мусина-Пушкина (15 апреля 1845 г.) Лобачевскому как ректору было предписано временно управлять учебным округом, а исполнение обязанностей ректора было поручено проректору, профессору К. К. Фойгту. Между тем приблизилось окончание сроков ректорства и профессорской деятельности Лобачевского[1].

За четыре дня до баллотировки в совете Лобачевский написал заявление, в котором просил совет «от нового выбора... уволить», ссылаясь на наличие других достойных кандидатов. Но на заседании совета 15 сентября 1845 г. он по единодушной просьбе членов совета все-таки согласился баллотироваться и был единогласно избран ректором на очередное четырехлетие (уже шестое!). Однако, сообщая (как управляющий округом) в министерство 29 сентября результаты голосования, он вновь просил освободить его от ректорства. Несмотря на просьбу, Лобачевский был 20 ноября утвержден в должности ректора, а исполнять обязанности ректора стал И. М. Симонов, как новый проректор.

Но в следующем году кончился продленный срок профессорской службы Лобачевского и Симонова. Заседание совета состоялось 5 июня 1846 г., и было принято баллотировкой единогласное решение просить продлить срок службы обоим заслуженным профессорам. Однако Лобачевский как управляющий округом направил министру 3 июля 1846 г. свое представление, в котором просьбу совета в отношении Симонова поддержал, а на заведование кафедрой чистой математики вместо себя предложил молодого ученого, учителя гимназии А. Ф. Попова, «чтобы поощрить [его] далее к занятиям при несомненных его хороших способностях». «В силах еще первой молодости, не отвлекаемой подобно мне другого рода занятиями по службе и обязанностями семейственными, он не замедлит показать себя достойным профессором и встать в кругу самых известных европейских ученых», — писал Лобачевский.

Попов окончил университет в 1835 г. с серебряной медалью. Лобачевский был в числе оппонентов на защите им магистерской (1842) и докторской (1845) диссертаций. Подчеркивая важность последней, он опубликовал свой отзыв о ней в 1845 г., озаглавив его «Подробный разбор рассуждения, представленного магистром А. Ф. Поповым под названием «Об интегрировании дифференциальных уравнений гидродинамики, приведенных к линейному виду» на степень доктора математики и астрономии».

---

[1] При изложении дальнейших событий 1845—1846 гг. с любезного согласия С. Н. Корытникова нами были использованы выявленные им архивные материалы.

Надежды Лобачевского впоследствии оправдались. А. Ф. Попов (1815—1879) действительно завоевал европейскую известность и был избран членом-корреспондентом Академии наук (1866).

Представление Лобачевского заканчивалось следующими словами: «При таких обстоятельствах желание с моей стороны оставаться в должности профессора не могло бы почитаться справедливым...»

Это благородное решение вызвало следующий ход событий. Лобачевский был уволен указом от 14 августа 1846 г. не только от должности профессора, но и ректора и назначен на вновь учрежденную должность — помощника попечителя (пенсия сохранялась, но специального оклада не было установлено, кроме 800 рублей в год за управление канцелярией). Отстранение от ректорства было для него тяжелым ударом.

Ректором (после избрания 27 ноября 1846 г.) был утвержден И. М. Симонов. А. Ф. Попов был избран по настойчивому представлению Лобачевского в сентябре 1846 г. экстраординарным профессором.

После назначения 22 мая 1847 г. нового попечителя генерал-майора В. Л. Молоствова Лобачевский оказался совсем отстраненным от университета, с которым была связана вся его жизнь и который был обязан ему своим развитием. В должности помощника попечителя он имел теперь дело только с училищами и гимназиями. При этом его материальное положение сильно ухудшилось. Между тем организация хозяйства в имении требовала постоянных вложений. Семья была большая, и расходы возрастали, а его жалованье сильно сократилось, и, кроме того, он лишился ректорской квартиры.

Тяжелое горе постигло его в 1852 г.— от туберкулеза скончался его любимый старший сын Алексей, студент университета. Второй сын Николай, тоже студент, в следующем году бросил университет и ушел на военную службу.

Все это заметно сказалось на его здоровье. Стали повторяться сердечные приступы с потерей сознания. Но, несмотря на болезнь и начавшуюся слепоту, он приходил в университет на экзамены, на торжественные собрания, принимал участие в ученых диспутах при защитах диссертаций (по докторской диссертации А. С. Савельева (1852), по магистерской И. А. Больцани (1853) и др.).

Отстранение Лобачевского от университета, ухудшение здоровья, семейные несчастья и начавшееся разорение —

все это резко изменило уклад его семейной жизни. Он оказался в одиночестве, стал угрюмым. Только несколько профессоров, его прежних ближайших сотрудников и бывших учеников, не переставали его навещать.

В 1855 г. он закончил свой последний труд — «Пангеометрию».

Необходимость оказать материальную помощь Лобачевскому была очевидна. Попечитель Молоствов просил об этом министра в 1852 и 1855 гг., указывая, что за свою сорокалетнюю «отлично усердную службу» Лобачевский заслуживает по крайней мере жалованья за работу в должности помощника попечителя (его преемник по должности сразу стал получать 2000 рублей в год), но всегда получал отказ.

Новый министр А. С. Норов посетил 21 сентября 1855 г. Казань и осмотрел университет. Это дало возможность больному и почти ослепшему Лобачевскому лично представиться министру и просить о годовом отпуске и денежной помощи для лечения (эта письменная просьба была поддержана и попечителем). Однако министр в своем докладе Александру II просил уволить Лобачевского как бесполезного, оставив еще на годовой срок (кроме пенсии) сумму 800 рублей, и получил на это согласие.

Вынужденные просьбы умирающего великого ученого вызвали холодное решение — отчислить со службы. И беспомощный Лобачевский благодарит за жалкие условия увольнения. Через два дня Лобачевский, не имея средств на поездку в Москву для лечения, просит опять министра о единовременном пособии для этой цели.

Наконец, за 12 дней до смерти он получает извещение, что разрешено выдать ему 1500 рублей, и он благодарит министра за «лестное внимание», высказывая надежду, что сможет «еще быть полезным».

Но врачи уже были бессильны ему помочь, и 12(24) февраля 1856 г. он скончался.

5 Заказ 3105

Часть вторая

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИДЕИ ЛОБАЧЕВСКОГО. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

VIII. ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ. НАЧАЛА ЕВКЛИДА. ПРОБЛЕМА ПАРАЛЛЕЛЕЙ И ЕЕ РЕШЕНИЕ ЛОБАЧЕВСКИМ

Как показывают археологические раскопки и исследования, проведенные на территории Египта и Месопотамии, математика является одной из древнейших наук. Возникла и развивалась она вследствие жизненных потребностей человеческого общества. Необходимо было вести учет количества скота, продуктов питания, измерять время, расстояния, оценивать площади земельных участков и урожай (для сбора налогов), объемы сосудов, военные заготовки, рассчитывать торговые и финансовые операции, взвешивать товары и т. п.

Документы той эпохи (папирусы и глиняные таблички) показывают, что математика носила тогда (3—2 тыс. лет до н. э.) инженерно-практический характер, т. е. математические знания, методы и приемы оформлялись в виде сборников, содержащих постановку и решение типичных задач, большей частью с конкретным хозяйственным содержанием. Хотя правила и формулы отчетливо не высказывались, их можно было усвоить, ими можно было овладеть, рассматривая конкретные задачи и числовые примеры. После постановки задачи и изложения хода решения, которое начиналось с обращения к читателю: «Делай так!», конечный результат всегда подвергался проверке. Затем следовало заключение: «Ты сделал правильно!» У вавилонских математиков существовали вспомогательные таблицы умножения, таблицы квадратов, кубов, обратных величин. Был разработан счет с дробями. Решались задачи, сводящиеся к линейным и квадратным уравнениям, к системам уравнений. В области геометрии были известны зависимость между катетами и гипотенузой прямоугольного треугольника, площади основных фигур, объемы простейших многогранников, приближенные формулы для вычисления длины окружности и площади круга.

Однако математика как наука, обладающая своей определенной структурой, применяющая логические выводы — доказательства при разработке учения о числах и фигурах, тогда еще не существовала. В таком виде она сложилась позднее, в условиях античной Греции в V и IV вв. до н. э. Хотя и здесь социально-экономическое строение общества принадлежало к рабовладельческой формации, но в отличие от деспотий Египта и Вавилона, в управлении государством проявлялся известный демократизм, распространявшийся, конечно, только на свободных граждан. Греция в определенной своей части представляла собой союз небольших городов-государств (полисов), и вопросы управления, жизни и дел государственных обычно обсуждались на собраниях свободных граждан полиса (являющихся в большинстве рабовладельцами). Эти обсуждения, высказывания, речи и споры в значительной степени благоприятствовали общению граждан, появлению и развитию логики, отделению философии от религии, формированию отдельных наук и, в частности, становлению математики как науки. Математика теперь развивается философами и учеными, имена которых и даже сочинения (или цитаты из них) дошли до нас. Это: Фалес Милетский (VI в. до н. э.), школа Пифагора (VI—V вв. до н. э.), Гиппократ Хиосский (V в. до н. э.), Демокрит (V в. до н. э.), Евдокс (IV в. до н. э.), Аристотель (IV в. до н. э.), Евклид (IV—III вв. до н. э.), Архимед (III в. до н. э.), Аполлоний (III—II вв. до н. э.) и др.

У философа-энциклопедиста, создателя формальной логики Аристотеля отчетливо сформулированы логические принципы дедуктивного построения математической дисциплины. Чтобы что-то доказывать, делать логические выводы, нужно опираться на какие-то предшествующие положения, уже доказанные ранее. Но это восхождение к началам науки не может длиться до бесконечности, если не впадать в логическую ошибку «порочного круга», заключающуюся в том, что опираются на предложение, являющееся следствием того, которое требуется доказать. Поэтому для построения строгой математической теории необходимо перечислить некоторые предложения, на которые (и только на них) можно опираться при доказательстве.

Совершенно аналогичная ситуация получается с определениями. Для того чтобы аккуратно определять новые понятия, избегая при этом «порочного круга», необходимо вначале перечислить некоторые основные, неопределяемые понятия.

Эти принципы особенно четкое воплощение получили в обширном творении Евклида «Начала», текст которого дошел и до нашего времени. Книга Евклида пользовалась на протяжении более двух тысячелетий громадной популярностью.

«Начала» Евклида состоят из пятнадцати книг (частей) и в основном содержат материал, относящийся теперь к элементарной геометрии. Однако в них включены еще в своеобразной геометрической трактовке начала алгебры и теории чисел. Конечно, не все доказательства придумывал сам Евклид. Он использовал многие рассуждения и результаты, полученные в предшествующие два-три столетия. Следует еще учесть, что «Начала» не являются энциклопедией всех математических знаний его времени. Так, например, в них не включено учение о конических сечениях. «Начала» — это систематическое изложение основных начальных математических сведений, отправляясь от которых можно начинать самостоятельные исследования.

«Начала» переводили на все языки мира (на латинский — в IV в., на арабский — в IX в. н. э.). Первое печатное издание появилось в XV в. Несколько раз «Начала» переводились на русский язык. В XII—XVII вв. «Начала» служили учебным руководством в университетах, а в XVIII и XIX вв. и в школах (иногда в сокращенном или переработанном виде). В своих дальнейших исследованиях математики опирались на «Начала», как на нечто бесспорное. Этот труд считался образцом дедуктивного построения для любой науки. Евклидова геометрия служила и служит до настоящего времени в нашей обычной инженерной практике, дает основу знаний о пространственных отношениях. На нее опирается современная классическая механика, основные принципы которой были сформулированы И. Ньютоном в XVII в.

«Начала» имеют следующую структуру. Почти каждая книга начинается с определений тех терминов, которые в ней впервые появляются. Так, в начале первой книги помещены 23 определения. С современной точки зрения многие из них не являются строгими математическими определениями. Например: «точка — то, что не имеет частей», «линия — длина без ширины» и др. Но есть и содержательные определения. Например, для прямого угла, окружности, квадрата и т. п.

За определениями в первой книге находятся пять постулатов и четыре аксиомы (существуют варианты текста «Начал», содержащие просто одиннадцать аксиом или пять постулатов и семь аксиом и др.). Это те предложения, которые принимаются без доказательства и на основе которых логически выводится все содержание «Начал». Разница между постулатами и аксиомами, как полагают многие исследователи «Начал», заключается в том, что первые имеют конструктивный характер и относятся только к самим геометрическим фигурам, а вторые частично и к числам, возникающим как геометрические величины (длина, величина угла, площадь, объем). В современных дедуктивных системах все исходные положения называют аксиомами. О логическом строении геометрии и системе аксиом, близкой к современным требованиям математической строгости, см. главу XI в книге «Геометрия» (Учебное пособие для 8 класса средней школы. Под ред. А. Н. Колмогорова. М., «Просвещение», 1976).

Далее у Евклида геометрия развивается постепенно, в виде цепи предложений (теорем), которые логически доказываются с помощью ссылок на аксиомы, постулаты и предшествующие теоремы.

Приведем теперь формулировку аксиом и постулатов Евклида (это один из вариантов):

Постулаты

Нужно потребовать:

1) чтобы от каждой точки к каждой точке можно было провести прямую линию;

2) и чтобы ограниченную прямую можно было непрерывно продолжать по прямой;

3) и чтобы вокруг любого центра любым радиусом можно было провести окружность;

4) и чтобы все прямые углы были равны друг другу;

5) и чтобы, когда прямая, пересекая две прямые, об-

разует внутренние односторонние углы, составляющие в сумме меньше двух прямых углов, эти прямые при продолжении пересекались в точке, лежащей с той стороны, где расположены эти углы.

Аксиомы

1) равные одной и той же, равны между собой;

2) и если к равным прибавить равные, то получатся равные;

3) и если от равных отнять равные, то получатся равные;

4) совмещаемые друг с другом равны друг другу.

В конце XIX в. были выявлены существенные пробелы в аксиоматике «Начал». Но до этого труд Евклида рассматривался как самое совершенное безупречное дедуктивное изложение системы геометрии, и задачей многочисленных комментаторов на протяжении двух тысячелетий являлось внесение пояснений или некоторых усовершенствований.

Особое внимание комментаторов привлекла проблема параллелей. После создания «Начал» утвердился ошибочный взгляд, что постулаты и аксиомы не требуют доказательств в силу своей простоты и очевидности. Но пятый постулат резко отличался от прочих более сложной формулировкой и отсутствием непосредственной очевидности. Ученым казалось, что это скорее теорема, которую Евклид просто не сумел доказать.

Таким образом, возникла задача доказать это предложение, опираясь на остальные аксиомы и постулаты. Над решением этой задачи впоследствии безуспешно бились сотни геометров. В каждом из предложенных ими доказательств удавалось затем обнаружить или грубые ошибки в рассуждениях, или более глубоко скрытые неточности, заключающиеся в том, что автор незаметно для себя пользовался каким-то новым постулатом или предложением, невыводимым из остальных. На этом пути выявился целый ряд предложений, эквивалентных пятому постулату, т. е. предложений, которыми можно заменить пятый постулат при построении геометрии, но сама проблема оставалась нерешенной. В школьных учебниках геометрии вместо постулата Евклида вводится обычно следующая аксиома параллельности: *на плоскости через точку, лежащую вне прямой, проходит только* *одна параллель к этой прямой.* В этой форме аксиома параллельности была введена впервые английским математиком XVIII в. Плейфером.

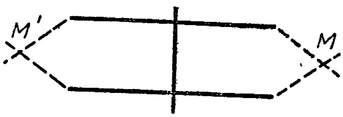


Рис. 1

Следует напомнить, что две прямые называются у Евклида параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Что такие прямые существуют, доказывается легко. Действительно, на плоскости два перпендикуляра к одной прямой (рис. 1) не могут пересечься (иначе, рассмотрев симметрию с осью, мы получили бы, что существует и вторая точка M' пересечения, а тогда через точки M и M' проходили бы две различные прямые). Таким образом, эти перпендикуляры параллельны[1].

Нетрудно доказать, что через данную точку на плоскости всегда можно провести параллель к данной прямой. Для доказательства опустим из этой точки перпендикуляр на данную прямую, а затем через ту же точку проведем к нему перпендикулярную прямую (восставим перпендикуляр), которая и будет, по ранее сказанному, параллелью к данной прямой.

Однако доказать, что эта параллель будет единственной, что через данную точку параллель проходит только одна, никак не удается.

Поскольку существование по крайней мере одной параллели мы можем доказать, в современной литературе обычно формулируют аксиому параллельности в более слабой форме, чем у Плейфера. А именно: *через точку A проходит не более одной прямой, параллельной данной прямой p.*

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых попыток доказательства пятого постулата.

Древнегреческий ученый Посидоний (I в. до н. э.) предложил назвать параллелью прямую, все точки которой удалены от данной прямой на постоянное расстояние. Тогда пятый постулат легко доказывается. Ошибка Посидония заключается в незаметно введенном

[1] В учебнике геометрии для VI класса приведено другое доказательство: различные центрально-симметричные прямые не имеют общих точек.

(в формулировке определения параллелей) новом постулате: *на плоскости множество всех точек, отстоящих от данной прямой на постоянное расстояние, является прямой линией* (рис. 2).

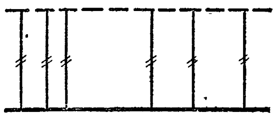


Рис. 2

Арабский ученый ал-Джаухари (IX в.) пользовался в своем доказательстве допущением, что если накрест лежащие углы равны для одной секущей, то они равны и для другой (рис. 3).

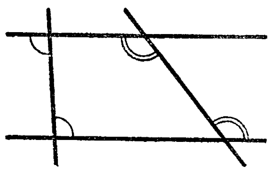


Рис. 3

Багдадский ученый Сабит ибн Корра (IX в.) допускал, что существует «простое», движение (поступательное, все траектории прямые). А тогда любые две траектории — равностоящие прямые, и постулат параллельности доказывается.

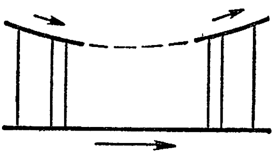


Рис. 4

Персидский поэт и ученый Омар Хайям (XI—XII вв.), комментируя Ибн-аль-Хайсама (X—XI вв.), повторявшего доказательство Сабит ибн Корры, отвергал ссылки на существование «простого» движения, как не носящие математического характера. Сам он ввел явно новый постулат, ссылаясь на Аристотеля: на плоскости две «сближающиеся» прямые обязательно пересекутся, т. е. невозможно, чтобы сближение перешло в расхождение у двух непересекающихся прямых (рис. 4). Он стал рассматривать четырехугольник $ABCD$ с прямыми угла-

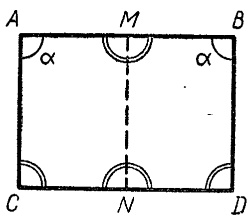


Рис. 5

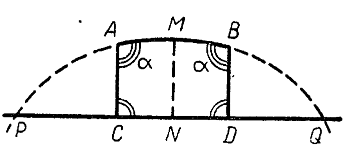


Рис. 6

ми при основании CD и конгруэнтными боковыми сторонами AC и BD (рис. 5). Легко доказывается, что тогда $\angle A \cong \angle B \cong \alpha$. Возможны только три предположения о величине угла α:

угол α острый, т. е. $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (гипотеза острого угла);

угол α тупой, т. е. $\alpha > \frac{\pi}{2}$ (гипотеза тупого угла);

и, наконец, угол α — прямой, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (гипотеза прямого угла).

С помощью постулата Аристотеля Хайям доказал, что первый и второй случаи невозможны. Действительно, если рассмотреть отрезок MN (рис. 6), где M и N — середины $[AB]$ и $[CD]$, то углы с вершинами M и N — прямые; нетрудно доказать, что в случае гипотезы острого угла $|MN| < |AC| = |BD|$. Но это противоречит постулату Аристотеля. В случае гипотезы тупого угла $|MN| > |AC| = |BD|$; из постулата Аристотеля следует, что прямые AB и CD пересекаются в некоторых точках, в точках P и Q, т. е. через точки P и Q проходят две различные прямые, что невозможно. Значит, справедлива третья гипотеза, из которой вытекает, что сумма углов треугольника равна π, что равносильно пятому постулату Евклида.

Пытались доказать пятый постулат и ученые Западной Европы.

Английский математик Джон Валлис (или Уолисс) (1616—1703) допустил существование подобных (но не конгруэнтных) треугольников. Рассмотрим его доказательство.

Пусть (AA') и (BB') — перпендикуляры к прямой AB, а луч AS образует с $[AB]$ острый угол (рис. 7). Из произвольной точки M_1 луча AS опустим перпендикуляр M_1B_1 на прямую AB и рассмотрим прямоугольный треугольник ABM, подобный треугольнику AB_1M_1. Для этого нужно «продолжить» отрезок AM_1 и на продолжении взять точку M так, чтобы

$$\frac{|AM|}{|AM_1|} = \frac{|AB|}{|AB_1|}.$$

Но из подобия следует, что $\widehat{ABM} = \widehat{AB_1M} = d$. Следовательно, точка M лежит на прямой BB', т. е. тем самым доказано, что перпендикуляр и наклонная пересекаются, откуда и следует пятый постулат.

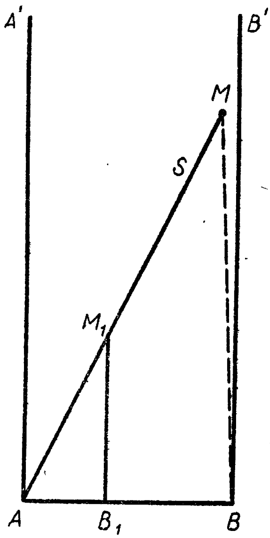


Рис. 7

Итальянский математик Джироламо Саккери (1667—1733) опирался на изучение четырехугольника Хайяма. Саккери привел к противоречию следствия из гипотезы тупого угла, а далее после длинной цепи рассуждений получил, как ему казалось, противоречие и в следствиях из гипотезы острого угла. Тогда оставалась третья гипотеза, и из нее вытекал постулат Евклида. Но в исследовании гипотезы острого угла Саккери допустил ошибку.

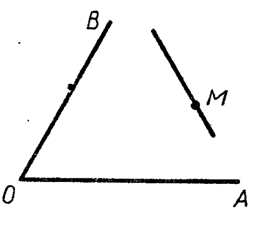


Рис. 8

Известный французский математик А. Лежандр (1752—1833), автор широко распространенного в те годы учебника «Начала геометрии» (или «Элементы геометрии»), тоже сделал ряд попыток доказать постулат Евклида. Он доказал, что сумма углов треугольника не может быть больше π. Но, доказывая, что она не может быть и меньше π, он незаметно ввел новое допущение: через точку M, лежащую внутри острого угла AOB, всегда можно провести прямую, пересекающую обе стороны OA и OB этого угла (рис. 8). Если бы не введение нового допущения, эквивалентного постулату Евклида, можно было бы считать этот постулат доказанным. Действительно, если сумма углов не может быть больше π и не может быть меньше π, то остается третье возможное предположение: сумма углов треугольника равна π. А отсюда вытекает и постулат Евклида.

Обнаружив впоследствии свою ошибку, Лежандр в дальнейших изданиях учебника отказался от попыток дать доказательства пятого постулата и высказал его в следующей форме: *на плоскости перпендикуляр и на-*

клонная, проведенные к одной прямой, пересекаются (рис. 9).

Таким образом, в начале XIX в. проблема параллелей оставалась нерешенной.

Лобачевский в первые годы своей педагогической деятельности тоже делал, как уже было упомянуто, попытку доказать постулат Евклида (1817). Он действовал смелее своих предшественников и далеко углубился в следствия, вытекающие из гипотезы, что сумма углов треугольника меньше π. При этом он доказал ряд важных теорем абсолютной геометрии. Но впоследствии все-таки ему пришлось признать свою попытку неудачной.

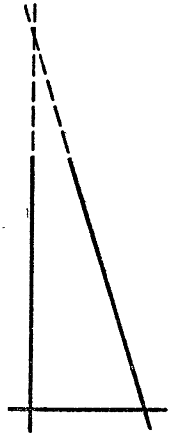


Рис. 9

В составившем эпоху в развитии геометрии докладе 1826 г. Лобачевский дал уже окончательное, но совсем неожиданное решение проблемы. Он создал новую геометрию, заменив евклидов постулат более общей аксиомой параллельности и сохранив прочие аксиомы и постулаты.

Смысл аксиомы Лобачевского легче понять, если рассмотреть предварительно на плоскости произвольную прямую $A'A$, точку P вне прямой, перпендикуляр PQ к прямой $A'A$ и переменную точку M на луче QA (рис. 10). При движении точки M по лучу QA от Q к точке A прямая PM поворачивается против часовой стрелки. Таким образом, имеется какое-то предельное положение, луч PT, к которому приближается луч PM, когда M неограниченно удаляется по лучу QA.

1°. Если допустить, что $[PT)$ совпадает с $[PB)$, мы получим постулат параллельности Евклида. Единственной непересекающей прямой, проходящей через точку P, будет $(B'B)$.

2°. Можно сделать более общее допущение (оно и было принято Лобачевским). Аксиома Лобачевского: луч PT образует с лучом PQ некоторый острый угол α

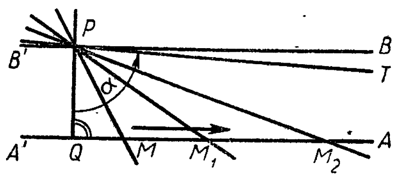


Рис. 10

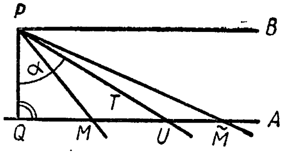


Рис. 11

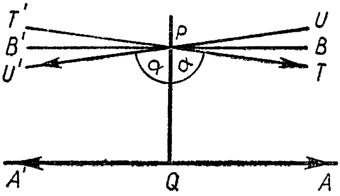


Рис. 12

$\left(\widehat{QPT}=\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Этот угол Лобачевский назвал *у г л о м п а р а л л е л ь н о с т и* для отрезка PQ.

Заметим, что в случае 2° луч PT не может пересекать $[QA)$, так как иначе, взяв точку $\tilde{M}$ так, что $|Q\tilde{M}|>|QU|$ (рис. 11), мы получим луч $P\tilde{M}$, тоже пересекающий $[QA)$, но в этом случае луч PT не является предельным для лучей PM, пересекающих $[QA)$.

Прямая PT названа Лобачевским параллелью к $(A'A)$ в точке P в направлении $A'A$.

Рассмотрев симметрию с осью (PQ), мы видим, что (UU'), симметричная (TT'), также проходит через точку P и не имеет общих точек с (QA). Эти две прямые $T'T$ и UU' названы параллелями в точке P к прямой $A'A$ в двух ее направлениях соответственно $A'A$ и AA' (рис. 12).

С помощью этих прямых все прямые, проходящие через точку P, разбиваются на два класса.

I к л а с с. Прямые, пересекающие $A'A$ (это прямые, содержащиеся в объединении двух вертикальных углов $U'PT$ и UPT'). Множеству таких прямых принадлежит прямая PQ.

II к л а с с. Прямые, не пересекающие $A'A$ (параллели $T'T$ и UU', а также все прямые, содержащиеся в объединении вертикальных углов TPU и $U'PT'$; этот класс содержит и прямую $B'B$). Прямые этого класса, отличные от параллелей, Лобачевский назвал разводными (смысл этого термина будет ясен из дальнейшего). Теперь их называют *р а с х о д я щ и м и с я* или *с в е р х п а р а л л е л я м и* к прямой $A'A$.

Отметим, что в своей первой публикации Лобачевский развивал геометрию, исходя из предположения, что сумма углов треугольника меньше π, откуда уже вытекала рассмотренная выше теория параллелей. В последующих работах он сначала излагает теорию параллелей, сразу начиная различать два класса прямых: прямые, пересекающие и не пересекающие данную. Аксиому параллельности Лобачевского можно сформулировать и в такой форме (чтобы подчеркнуть противоречие с евклидовой аксиомой): *на плоскости через точку, лежащую вне данной прямой, проходит более одной прямой, не пересекающей данную.*

IX. ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Прежде чем знакомиться с некоторыми результатами геометрии Лобачевского, важно отчетливо понять, что все те предложения и понятия, которые не опираются на постулат параллельности, будут совпадать с соответствующим материалом геометрии Евклида (так в плоскости Лобачевского существуют перпендикуляры, осевые симметрии и повороты. Справедливы свойства равнобедренного треугольника, соотношения «больше» и «меньше» между сторонами и углами треугольника, известные признаки равенства треугольников, теорема о внешнем угле треугольника и т. п.). Этот материал, общий той и другой геометрии, составляет, по современной терминологии, «абсолютную геометрию». Различие между геометрией Лобачевского и геометрией Евклида может наблюдаться только там, где в доказательствах используется постулат параллельности или его следствие[1].

Переходя к обзору основных теорем геометрии Лобачевского, мы не будем давать их доказательств, а ограничимся указаниями на их отличие или сходство с теоремами евклидовой геометрии. Доказательства потребовали бы значительного места. Познакомиться с доказательствами в доступной форме можно в книгах Широкова, Нордена.

1. Прежде всего, в отличие от евклидовой геометрии теорема о том, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам, т. е. π, здесь оказывается неверной. В геометрии Лобачевского эта сумма меньше π и может

---

[1] Так, все сведения, которые приведены в «Геометрии, 6» до п. 31 включительно, справедливы и в геометрии Лобачевского. Теорема о средней линии треугольника, теорема Пифагора и т. д. для плоскости Лобачевского не имеют места.

быть неодинакова у различных треугольников. Она связана с площадью σ треугольника формулой

$$A+B+C=\pi-\frac{\sigma}{k^2},$$

где k — некоторая постоянная величина. Отсюда видно, что площадь треугольника не может быть сколь угодно большой

$$\sigma \leqslant \pi k^2.$$

2. Важно отметить, что в плоскости Лобачевского нет подобных, но не конгруэнтных фигур. Это объясняется тем, что все теоремы о подобии выводятся только с помощью евклидовой теории параллелей. Зато появляется новый признак равенства треугольников по трем углам.

3. Перечислим основные свойства параллельных прямых.

1°. На плоскости через данную точку проходит единственная прямая, параллельная в этой точке данной прямой в заданном на ней направлении (этот факт выражен в аксиоме параллельности Лобачевского).

2°. Параллель p к прямой a, проведенная в некоторой точке P, параллельна прямой a в каждой своей точке. (Поэтому в дальнейшем будем просто говорить, что одна прямая параллельна другой прямой в данном направлении.)

3°. Выполняется свойство **взаимности** (если l параллельна m в определенном направлении, то и m параллельна l в соответствующем направлении) и свойство **транзитивности** (если l и m параллельны n в одном направлении, то они параллельны друг другу в соответствующем направлении).

4. Угол параллельности α не может быть постоянным (если он постоянен, то обязательно прямой, т. е. мы приходим к геометрии Евклида). Исследование показывает, что α является монотонно убывающей функцией длины отрезка PQ. Если мы обозначим длину $[PQ]$ буквой x, то угол α изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0, когда x возрас-

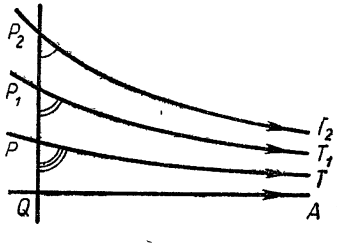


Рис. 13

тает от 0 до $+\infty$ (рис. 13).

5. Лобачевский нашел для этой функции следующее уравнение[1]:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=e^{-\frac{x}{k}},$$

отсюда следует, что

$$\alpha=2\operatorname{arctg}(e^{-\frac{x}{k}}),$$

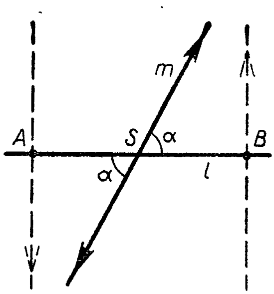


Рис. 14

где k — длина некоторого постоянного отрезка, называемого впоследствии радиусом кривизны пространства, а e — так называемое число Непера — основание натуральных логарифмов:

$$e=2{,}71828\ldots.$$

Заметим, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha}{2}=\lim_{k\to\infty}\operatorname{arctg}e^{-\frac{x}{k}}=1,$$

т. е. $\frac{\alpha}{2}\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{\pi}{4}$ и $\alpha\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{\pi}{2}$. Следовательно, геометрию Евклида можно считать предельным случаем геометрии Лобачевского.

6. Еще до установления упомянутой функциональной зависимости Лобачевский доказал, что каждый острый угол можно рассматривать как угол параллельности некоторого отрезка.

Новая аксиома параллельности влечет многие новые непривычные для нас свойства прямых, т. е. такие свойства, которые в евклидовой геометрии не имеют места. Так, например, из предыдущей теоремы следует, что ортогональная проекция прямой m, пересекающей в точке S прямую l под любым углом α, есть интервал AB, а не прямая, где $[AS]$ и $[SB]$ отрезки, для которых угол α служит углом параллельности (рис. 14).

7. Две различные прямые на плоскости могут образовывать пару только одного из трех типов:

1°. Пересекающиеся прямые (рис. 15). Об их

[1] Возможно, что именно этот результат Лобачевский упоминает в названии своего доклада как теорему о параллелях.

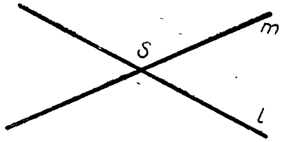


Рис. 15

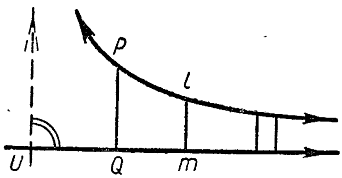


Рис. 16

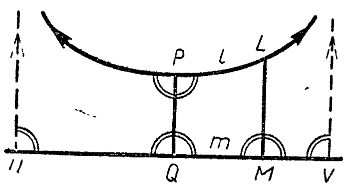


Рис. 17

новом свойстве мы только что упоминали. Другое их свойство такое же, как в евклидовой геометрии. А именно, расстояние от точки одной прямой до другой прямой неограниченно увеличивается при достаточном удалении рассматриваемой точки от точки пересечения.

2°. Параллельные прямые (рис. 16). В направлении параллельности они неограниченно сближаются, аналогично тому как гипербола приближается к своей асимптоте. Иначе говоря, расстояние от точек одной прямой до другой прямой делается сколь угодно малым. В направлении противоположном это расстояние неограниченно возрастает. При этом найдется такой перпендикуляр к одной прямой, который будет параллелен другой прямой в направлении, противоположном исходному направлению параллельности.

Сделаем важное замечание, касающееся наших чертежей, изображающих поведение прямых на плоскости Лобачевского. Как показывают опыты, наше физическое пространство по свойствам или евклидово, или очень мало от него отличается (отрезок k тогда очень велик). Оперируя с чертежом, мы вынуждены ограничиться его малыми размерами, а отклонение от евклидовости, если оно существует, будет наблюдаться только при очень больших протяжениях. Поэтому для наглядности обычно принято изображать прямые, слегка их искривляя, чтобы отчетливее выразить характер их сближения или расхождения на плоскости Лобачевского. Отметим, однако, что сам Лобачевский такие вольности себе не разрешал.

3°. Расходящиеся прямые (рис. 17). Они имеют один общий перпендикуляр. Расстояние между точками основания перпендикуляра (длина отрезка перпендикуляра) является минимальным расстоянием между этими прямыми. По обе стороны перпендикуляра прямые расходятся, и притом неограниченно. Отметим еще, что ортогональной проекцией каждой из расходящихся прямых на другую является конечный открытый отрезок. На рисунке 17 открытый отрезок UV изображает проекцию прямой l на прямую m.

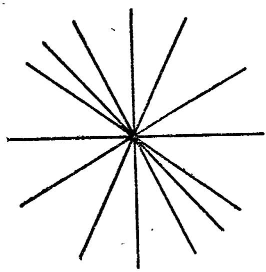


Рис. 18

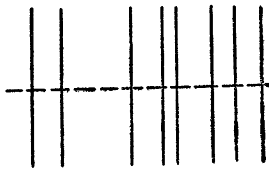


Рис. 19

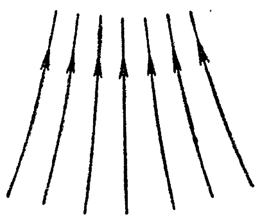


Рис. 20

8. Трем типам пар прямых на плоскости соответствуют три типа пучков прямых, каждый из которых покрывает всю плоскость.

1°. Пучок 1-го рода (рис. 18). Это множество всех прямых плоскости, проходящих через одну точку (центр пучка).

2°. Пучок 2-го рода (рис. 19). Это множество всех прямых плоскости, перпендикулярных к одной прямой, которая называется базой пучка.

3°. Пучок 3-го рода (рис. 20). Это множество всех прямых плоскости, параллельных одной прямой l в заданном на ней направлении (прямая l тоже включается в это множество); любые две прямые такого пучка параллельны между собою в направлениях, соответствующих заданному.

9. С помощью трех пучков легко получить аналоги окружностей плоскости Евклида. А именно, достаточно рассмотреть ортогональные траектории пучков прямых, т. е. линии, пересекающие все прямые пучка под прямым углом.

1°. Окружность в собственном смысле (рис. 21). Это ортогональная траектория прямых пучка 1-го рода. Возможны любые размеры радиуса.

6 Заказ 3105

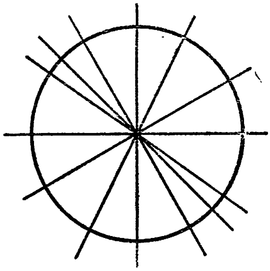


Рис. 21

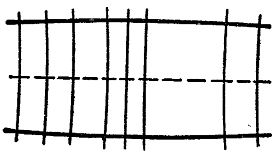


Рис. 22

2°. Эквидистанта, или линия равных расстояний (рис. 22). Это ортогональная траектория прямых пучка 2-го рода (но база сюда не включается). Доказывается, что все точки эквидистанты находятся на постоянном расстоянии от базы (чем и объясняется ее название: aequus — равный, distantia—расстояние). Эта линия вогнута в сторону базы и незамкнута.

Опираясь на интерпретацию Клейна геометрии Лобачевского (раздел X), эквидистанту рассматривают как окружность с идеальным центром, т. е. с центром, лежащим за бесконечно удаленными точками.

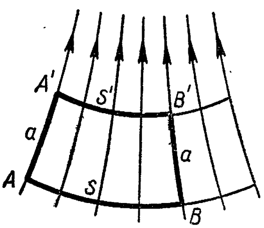


Рис. 23

3°. Предельная линия, или орицикл (рис. 23). Это ортогональная траектория прямых пучка 3-го рода. Она обладает замечательными свойствами. Так, все предельные линии конгруэнтны. Они незамкнуты и вогнуты в сторону параллельности прямых пучка. Предельную линию можно рассматривать как окружность с бесконечно удаленным центром.

Доказывается, что две предельные линии, построенные для одного и того же пучка 3-го рода, высекают на прямых этого пучка конгруэнтные отрезки, т. е. эти линии не только конгруэнтны, но и «концентричны».

Далее оказывается, что отношение длин «концентричных» дуг, заключенных между двумя прямыми пучка, является показательной функцией расстояния a между дугами:

$$\frac{s}{s'}=e^{\frac{a}{k}}.$$

10. Особенно важно отметить, что каждый из аналогов окружности может скользить по самому себе, как это имеет место и для прямой линии. Если вместе с такой обобщенной окружностью заставить двигаться всю плоскость, то возникают три типа вращения плоскости:

1°. Вокруг собственного центра.

2°. Вокруг идеального центра (в этом случае одна из траекторий будет прямой линией, а остальные — эквидистанты).

3°. Вокруг бесконечно удаленного центра (все траектории между собой конгруэнтны, так как это предельные линии, но длины пройденных дуг различны).

Движение плоскости, возникающее при скольжении прямой по самой себе, не отличается от вращения типа 2°.

11. Поверхности, возникающие в пространстве при вращении аналогов окружности вокруг одной из прямых порождающего пучка, являются аналогами сферы и соответственно подразделяются на три типа:

1°. Сфера в собственном смысле.

2°. Поверхность равных расстояний (множество точек, удаленных от плоскости, образованной вращением базы, на постоянное расстояние).

3°. Предельная поверхность, или орисфера.

На сфере (в собственном смысле) возникает внутренняя геометрия больших кругов (о внутренней геометрии см. раздел X). Это обычная сферическая геометрия.

На поверхности равных расстояний возникает геометрия эквидистант. Это планиметрия Лобачевского.

Но особенно замечателен факт, установленный Лобачевским: на предельной поверхности внутренняя геометрия является евклидовой! Роль прямых здесь играют предельные линии, получаемые сечением орисферы плоскостью, проходящей через какую-либо одну из прямых связки параллелей, порождающей поверхность. Каждая прямая этой связки ортогональна орисфере в точке пересечения с ней.

Таким образом, в пространстве Лобачевского были выделены криволинейные геометрические образы, подчиненные геометрии Евклида. Этот замечательный результат Лобачевский использовал для вывода тригонометрических соотношений между элементами прямолинейных треугольников в его пространстве, связывая свойства дуг и хорд предельных линий с известными тригонометрическими формулами для евклидовых треугольников. Но итоговые тригонометрические соотношения гораздо слож-

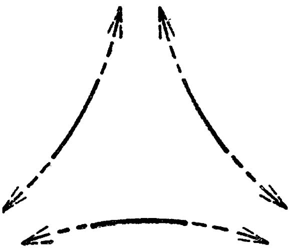


Рис. 24

нее евклидовых и, кроме тригонометрических функций углов, они содержат не просто длины сторон, а некоторые функции от них, а именно комбинации показательных функций, называемые гиперболическими функциями. (Их можно выразить и через тригонометрические функции от угла параллельности $\Pi(a)$; в последней форме эти соотношения и были найдены Лобачевским.)

12. Мы не будем здесь выписывать эти сложные формулы, но должны помнить, что решение любых задач на измерения в пространстве Лобачевского опирается на них. Отметим только один важный результат, о котором уже говорили раньше. Площадь треугольника выражается через сумму его углов:

$$\sigma = k^2[\pi - (A+B+C)].$$

Следовательно, величина площади получится самой большой, т. е. равной

$$\sigma = \pi k^2,$$

если $A+B+C=0$, т. е. при $A=0$, $B=0$, $C=0$. Это может иметь место, только если все три вершины удалены в бесконечность, т. е. стороны попарно параллельны (рис. 24). Такой обобщенный треугольник называется асимптотическим. Любой треугольник с собственными вершинами будет иметь площадь меньшей величины, чем у асимптотического, хотя разность этих площадей может быть сделана сколь угодно малой. Таким образом, наибольшего по площади треугольника с вершинами на конечном расстоянии не существует.

Особо следует подчеркнуть, что если в тригонометрических соотношениях для прямолинейных треугольников положить $k \to \infty$ или же считать, что линейные размеры a, b, c треугольника бесконечно малы ($a \to 0$, $b \to 0$, $c \to 0$), иначе говоря, когда $\frac{a}{k} \to 0$, $\frac{b}{k} \to 0$, $\frac{c}{k} \to 0$, то в пределе из формул Лобачевского непосредственно получаются обычные тригонометрические соотношения для евклидова пространства. Ограничимся одним примером. Связь между катетами и гипотенузой на плоскости Лобачевского такова:

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}=\operatorname{ch}\frac{c}{k}. \qquad (*)$$

Здесь ch — символ функции «гиперболический косинус», которая определяется так:

$$\operatorname{ch}\frac{x}{k}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right).$$

Если разложить показательную функцию $e^{\frac{x}{k}}$ в бесконечный ряд, то получим:

$$e^{\frac{x}{k}}=1+\frac{x}{k}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{k}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{k}\right)^3+\ldots,$$

откуда

$$\operatorname{ch}\frac{x}{k}=1+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{k}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{x}{k}\right)^4+\cdots.$$

Подставляя это выражение в (*) и обозначая многоточием малые высших порядков, получаем:

$$\left(1+\frac{a^2}{2k^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{b^2}{2k^2}+\cdots\right)=1+\frac{c^2}{2k^2}+\cdots.$$

Выполнив умножение в левой части уравнения, имеем:

$$1+\frac{a^2}{2k^2}+\frac{b^2}{2k^2}+\cdots=1+\frac{c^2}{2k^2}+\cdots,$$

т. е.

$$\frac{a^2}{2k^2}+\frac{b^2}{2k^2}+\cdots=\frac{c^2}{2k^2}+\cdots.$$

Пренебрегая малыми четвертого порядка, обозначенными многоточием, получаем евклидову теорему Пифагора:

$$a^2+b^2=c^2.$$

Все это вполне согласуется с тем, что при $k\to\infty$ угол параллельности стремится к $\frac{\pi}{2}$ и аксиома параллельности Лобачевского превращается в постулат Евклида.

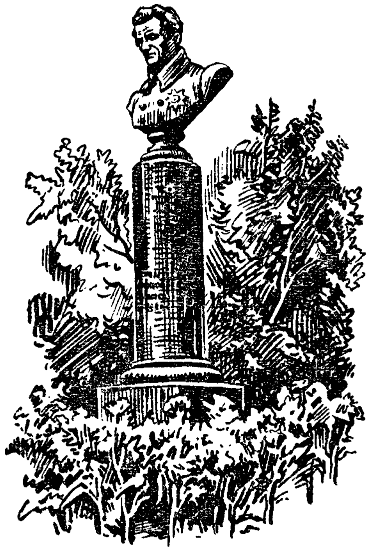
13. Лобачевский подверг глубокой разработке проблемы своей геометрии; в частности, он находил с помощью

методов дифференциального и интегрального исчисления площади фигур, ограниченные криволинейными контурами, и объемы тел. Формулы для этих величин содержат определенные интегралы. На этом пути, применяя сначала одни, а затем другие системы координат, он получил формулы для значений более двухсот определенных интегралов, часть которых можно было проверить, выполняя вычисления классическим способом. Таким образом, он показал применимость своей геометрии в математике. Значения определенных интегралов часто используются в технических приложениях механики, в физике и астрономии. Поэтому часто издаются справочники, или, как говорят, таблицы интегралов. Уже после смерти Лобачевского, в 1858 г., найденные им значения интегралов вошли в таблицы определенных интегралов.

Что касается возможности встретиться с противоречиями при дальнейшем развитии геометрии Лобачевского, то сам он видел непротиворечивость своей геометрии в том, что его тригонометрические соотношения между элементами прямолинейных треугольников совпадают с формулами сферической геометрии, если радиусу сферы придать чисто мнимое значение ki и применить теорию функций мнимого аргумента. Поэтому он считал, что любое противоречие в его геометрии неминуемо повлекло бы противоречие в геометрии сферы, а эта последняя геометрия сомнению не подвергается.

X. НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ ПОСЛЕ ЛОБАЧЕВСКОГО. СОЗДАНИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИЙ И ПРИЗНАНИЕ ИДЕЙ ЛОБАЧЕВСКОГО. ФОРМИРОВАНИЕ АКСИОМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА

Лобачевский умер, а его геометрия еще не получила признания. Его геометрические идеи, нарушившие установившуюся на протяжении тысячелетий традицию, казались нелепыми, и, как мы знаем, он подвергался даже издевательствам и насмешкам. А если некоторые геометры и относились к его идеям сочувственно, то, по-видимому, подобно Гауссу они (кроме П. И. Котельникова и Ф. Бойаи) не решались открыто высказываться, опасаясь «потревожить гнездо ос» или «вызвать крики беотийцев»[1]. Лишь в последующие десятилетия идеи Лобачевского нашли поддержку и продолжение, утвердив его как одного из революционеров в науке, вызвавшего коренные преобразования самых основ математики. Потребовалось дальнейшее развитие математических наук, чтобы стала ясной правильность его исследований, непротиворечивость его геометрии. И хотя признание пришло уже через 12—15 лет после его смерти, важное значение его идей для дальнейшего развития математики выявилось только к концу XIX в.



Памятник Н. И. Лобачевскому перед зданием университета

Основную роль в этом признании сыграли исследования следующих ученых из разных стран: математика Ф. Миндинга, немца по происхождению, работавшего в университете в Дерпте (ныне Тарту), итальянского математика Е. Бельтрами, англичанина А. Кэли, немецкого математика Ф. Клейна и француза А. Пуанкаре. Большую работу по выявлению значения трудов Лобачевского и по распространению его идей проделали Казанский университет и Казанское физико-математическое общество под председательством А. В. Васильева. Широкое признание его идеи получили к 100-летию со дня рождения великого ученого, торжественно отмеченного в 1893 г. Казанским университетом и Обществом. Обществом тогда же была учреждена Международная премия имени Лобачевского. Лауреатами этого конкурса в последующие годы были крупнейшие геометры: С. Ли, В. Киллинг,

[1] В Древней Греции жителей Беотии (область в Средней Греции) принято было считать грубыми, не понимающими тонкостей людьми.

Д. Гильберт, Ф. Шур, Г. Вейль, Э. Картан; из советских ученых В. В. Вагнер. В 1896 г. перед зданием университета был воздвигнут памятник Н. И. Лобачевскому (скульптор Мария Диллон).

После Великой Отечественной войны в 1950 г. была учреждена новая премия имени Н. И. Лобачевского Академией наук СССР. Она присуждалась в последующие годы А. Д. Александрову, Н. В. Ефимову, А. В. Погорелову, А. С. Понтрягину, Г. Хопфу и П. С. Александрову.

Еще в 1883 и 1886 гг. были изданы два тома трудов Лобачевского. Однако полное собрание всех его научных исследований (под редакцией В. Ф. Кагана) было осуществлено лишь после Великой Октябрьской социалистической революции. Издание вышло в пяти томах, с 1946 по 1951 г. В составлении комментариев приняла участие большая группа ученых из Москвы и Казани.

Основным мотивом непризнания геометрии Лобачевского было отсутствие убедительного доказательства ее непротиворечивости. Возникали сомнения, не появятся ли какие-либо противоречия в дальнейшем, когда будут делаться все новые и новые выводы. Не является ли вся эта теория пустой фантазией, которая впоследствии сама себя уничтожит?

Факты, позволившие устранить эти сомнения, были подготовлены теорией поверхностей, начала которой разрабатывались еще Эйлером и Лагранжем, а затем Монжем и его учениками. В трудах Гаусса (1827) эта теория получила новое направление. Гаусс стал рассматривать «внутреннюю геометрию поверхности», изучавшую свойства фигур на поверхности, которые сохраняются, если поверхность изгибать, т. е. менять ее форму, но без сжатий и растяжений (как нерастяжимую металлическую оболочку, а не как резиновую пленку). К внутренней геометрии поверхности относятся, прежде всего, следующие понятия и величины: «гладкая линия», «длина линий», «угол между пересекающимися линиями», «площадь фигуры, ограниченной контуром, лежащим на поверхности».

Так как длины при изгибании сохраняются, то и так называемые геодезические линии, т. е. линии кратчайшей длины для небольшой области, принадлежат внутренней геометрии поверхности. На сфере, например, геодезическими линиями являются большие окружности, на плоскости — прямые.

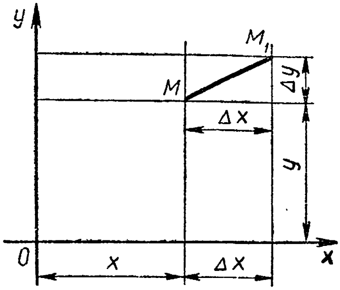


Рис. 25

На кривой поверхности геодезические линии обладают свойствами, близкими в известном смысле к свойствам прямой. А именно они не отклоняются в малом от своего направления. Это нужно понимать в том смысле, что они, грубо говоря, не искривлены в направлениях, параллельных касательной плоскости. Например, если кусок плоскости с начерченными на нем прямыми линиями свернуть в круговой цилиндр, то прямые линии (геодезические на плоскости) и на цилиндре дадут геодезические, но это будут уже не прямые, а винтовые линии (в частности, прямолинейные образующие цилиндра и окружности, к ним перпендикулярные).

Познакомимся немного подробнее с формулами, характеризующими внутреннюю геометрию поверхности. Как известно, на плоскости в системе прямоугольных декартовых координат квадрат расстояния между двумя точками $M(x,y)$ и $M_1(x_1y_1)$ (рис. 25) выражается формулой

$$|MM_1|^2=(x_1-x)^2+(y_1-y)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\ ,$$

где $\Delta x=x_1-x$ и $\Delta y=y_1-y$.

Если эти точки бесконечно близки, т. е. имеют координаты $M(x,y)$ и $M_1(x+dx, y+dy)$, то квадрат бесконечно малого расстояния ds между ними равен

$$ds^2=dx^2+dy^2\ .$$

В пространстве точки заданы тремя координатами $M(x,y,z)$ и $M_1(x+dx, y+dy, z+dz)$ и

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2\ .$$

Далее мы будем рассматривать точки, лежащие на поверхности. Поверхность можно задать одним уравнением, связывающим три координаты ее точек. Например, сферу с центром в начале координат можно определить как множество точек, расстояние от которых до начала равно постоянному числу a — радиусу сферы. Таким образом, координаты точек $M(x,y,z)$, лежащих на сфере (и только они), удовлетворяют уравнению $x^2+y^2+z^2=a^2$. Но поверхность в пространстве можно задать и иным способом, которым систематически пользовался Гаусс и который подчеркивает ее двумерность. Это так называемое параметрическое представление поверхности. Оно заключается в том, что задают три уравнения, выражающих координаты (x, y, z) точки M поверхности как функции двух переменных u и v (называемых параметрами):

$$x=x(u, v),$$

$$y=y(u, v),$$

$$z=z(u, v),$$

где $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ некоторые непрерывные и дифференцируемые функции. Изменяя u и v в определенных границах:

$$a \leqslant u \leqslant b,$$

$$c \leqslant v \leqslant d,$$

мы получим непрерывное отображение заданной области переменных u, v в пространство, т. е. кусок поверхности (при некоторых дополнительных условиях на упомянутые функции). Параметры u и v называются также криволинейными координатами на поверхности. Это объясняется тем, что линия на поверхности, получаемая, если изменять только u (а v придать одно постоянное значение $v=v_0$), называемая u-линией, будет, вообще говоря, кривой линией.

Если теперь вместо значения v_0 придавать v другие значения v_1, v_2, ... (они могут меняться и непрерывно), то получится семейство u-линий: $v=v_0$, $v=v_1$, $v=v_2$, ..., называемое также семейством линий $v=\text{const}$. (Латинское слово constans означает «постоянное».) Аналогично определяется второе семейство линий: v-линии, или, иначе говоря, линии $u=\text{const}$. В итоге на поверхности образуется криволинейная сеть, причем при определенных предположениях через каждую точку $M_k(u_k, v_k)$ поверхности будет проходить только одна u-линия $(v=v_k)$ и одна v-линия $(u=u_k)$, причем они не будут касаться, и любая пара, состоящая из u-линии и v-линии, будет иметь только одну точку пересечения. Поэтому эту сеть называют криволинейной координатной сетью, а соответствующие значения параметров $u=u_k$,

$v=v_k$ — криволинейными координатами точки M_k (см. рис. 26).

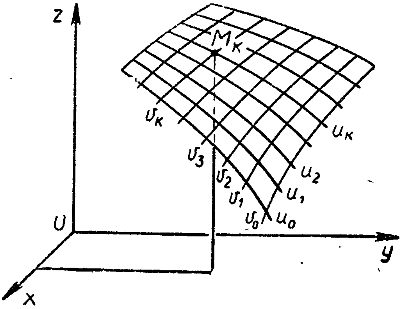


Рис. 26

Рассмотрим пример. Пусть

$$x=a\cos u\cdot\cos v,$$
$$y=a\cos u\cdot\sin v,$$
$$z=a\sin u,$$

где $\begin{cases} 0\leqslant u\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ 0\leqslant v\leqslant\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Эти уравнения определяют кусок поверхности, представляющий собою лежащую в первом координатном угле часть сферы радиуса a с центром в начале координат.

Действительно, можно выяснить, что параметры u и v являются здесь географическими координатами на сфере радиуса a: u — широта, v — долгота. Чтобы убедиться в этом, проведем из произвольной точки M этой части сферы (рис. 27) перпендикуляр MQ к плоскости xOy (плоскость экватора), из точки Q — перпендикуляр QP к оси Ox. Обозначив $u=\widehat{QOM}$ и $v=\widehat{QOP}$, получим:

$$x=|OP|=|OQ|\cos v=a\cos u\cos v,$$
$$y=|PQ|=|OQ|\sin v=a\cos u\sin v,\quad \text{где}\begin{cases} 0\leqslant u\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ 0\leqslant v\leqslant\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$
$$z=|QM|=|OM|\sin u=a\sin u,$$

Таким образом мы получили для точек указанной части сферы исходные параметрические уравнения.

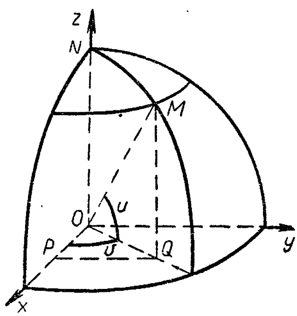


Рис. 27

Можно непосредственно убедиться, что все точки, определенные этими уравнениями, находятся на расстоянии a от начала координат. Действительно, если вычислить $x^2+y^2+z^2$ и применить тождества $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$ и $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$, получим:

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \cdot$$

Криволинейная координатная сеть в данном случае это сеть параллелей (малых кругов) и меридианов на сфере. В точке $N(0, 0, a)$, играющей роль Северного полюса, правильность сети нарушается, так как через эту точку проходит не один, а бесконечное множество меридианов (т. е. долгота этой точки не определена). В остальных точках сеть правильна, т. е. имеется взаимно однозначное соответствие: значениями (u, v) определяется точка M, и каждая точка M имеет определенную долготу v и широту u.

Рассмотрим формулу квадрата расстояния ds между двумя бесконечно близкими точками $M(u, v)$ и $M_1(u+du, v+dv)$, лежащими на поверхности, заданной параметрическими уравнениями

$$x=x(u, v),$$
$$y=y(u, v),$$
$$z=z(u, v).$$

Учитывая формулу

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

и дифференцируя $x(u, v)$, $y(u, v)$ и $z(u, v)$, найдем для dx, dy, dz линейные однородные относительно du и dv выражения. Возводя их в квадрат и складывая, получим после приведения подобных членов однородное выражение второй степени относительно dx, dy, т. е. так называемую квадратичную форму, коэффициенты которой — функции от u и v (их обычно обозначают буквами $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$, т. е.

$$ds^2=E(u, v)du^2+2F(u, v)dudv+ + G(u, v)dv^2 \cdot$$

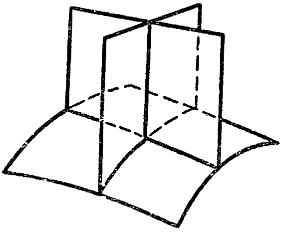


Рис. 28

Полученное для ds^2 выражение называется линейным элементом поверхности или первой дифференциальной квадратичной формой. Изгибание можно определить как деформацию поверхности, при которой линейный элемент, т. е. бесконечно малая длина, сохраняется. Тогда если на деформированную поверхность перенести в соответственные точки те же значения криволинейных координат (u, v), то нетрудно доказать, что $E(u, v)$, $F(u, v)$ и $G(u, v)$ в соответственных точках деформированной поверхности тоже будут иметь те же значения, что в исходных[1]. Но с помощью E, F и G, как доказывается в дифференциальной геометрии, выражаются величины длин дуг, углов и площадей фигур на поверхности, а также дифференциальные уравнения геодезических линий, и мы приходим к прежнему пониманию изгибания.

Гаусс доказал замечательную теорему, названную им самим великолепной (egreghium). Он доказал, что полная кривизна K поверхности в любой данной точке не меняется при изгибании, т. е. является, как говорят, инвариантом изгибания. Полной кривизной K называется произведение K_1K_2 главных кривизн, т. е. экстремальных значений кривизн нормальных сечений поверхности (сечений поверхности плоскостью, проходящей через нормаль, т. е. через перпендикуляр к поверхности (см. рис. 28). Главные сечения оказываются всегда взаимно перпендикулярными. Гаусс нашел формулу, дающую выражение K только через E, F, G и их производные до второго порядка, а это и доказывает, что при изгибании K сохраняет свое значение.

Ф. Миндинг продолжил исследования Гаусса и доказал в 1839 г., что кусок поверхности, обладающей **постоянной** полной кривизной, можно изгибанием наложить на поверхность с такой же полной кривизной. При этом оказывается, что можно совершенно свободно (но, вообще говоря, пользуясь изгибанием) передвигать его по ней (как плоскость накладывается и двигается по плоскости или цилиндру). А в 1840 г. Ф. Миндинг вывел тригонометрические соотношения для геодезических треугольников (стороны треугольников — геодезические линии) на поверхностях постоянной отрицательной кривизны.

Поверхность постоянной положительной кривизны — это кусок сферы (или его изгибания). Для таких поверх-

---

[1] Для этого достаточно в равенстве $ds^2=ds'^2$ положить сначала $dv=0$, тогда $Edu^2=E'du^2$, откуда $E=E'$. Далее положим $du=0$, и тогда $Gdv^2=G'dv^2$, т. е. $G=G'$. Наконец, учитывая полученное, имеем: $2Fdudv=2F'dudv$, т. е. $F=F'$.

ностей получились, естественно, формулы сферической тригонометрии. Если же $K<0$, то одно из главных сечений выпукло, а другое вогнуто. Поверхность в каждой точке имеет тогда седлообразную форму. Для такой поверхности, как показал Миндинг, формулы тригонометрии для геодезических треугольников можно получить из формул сферической тригонометрии, если радиус сферы заменить чисто мнимым числом (или же тригонометрические функции сторон заменить гиперболическими).

Но Ф. Миндинг не был знаком с работами Лобачевского и поэтому не заметил, что его формулы совпадают с тригонометрическими соотношениями для прямолинейных треугольников в пространстве Лобачевского. Кроме того, Лобачевский в 1840 г. (это показывают библиотечные записи) не брал на просмотр очередного тома журнала, в котором была напечатана работа Миндинга.

Таким образом, ни один из них не заметил, что установлен замечательный факт: *в евклидовом пространстве на поверхности постоянной отрицательной кривизны геометрия геодезических линий совпадает с планиметрией Лобачевского.*

Только через 28 лет (через 12 лет после смерти Лобачевского) итальянский геометр Е. Бельтрами сопоставил в 1868 г. оба исследования, провел строгие расчеты и подробно развил это истолкование, или, как говорят, интерпретацию (воплощение) геометрии Лобачевского. Поверхности постоянной отрицательной кривизны Бельтрами назвал псевдосферическими. Если их изогнуть в поверхности вращения, то возможны, как показал Миндинг, три типа таких псевдосфер (рис. 29).

Тем самым было убедительно доказано, что геометрия Лобачевского выражает свойства определенных криволинейных фигур в пространстве Евклида, а следовательно, она не может иметь противоречий, так как иначе противоречия проявились бы и в евклидовой геометрии[1].

После того как непротиворечивость геометрии Лобачевского стала для математиков очевидной, идеи неевк-

---

[1] Правда, доказательство было не совсем полно, так как интерпретировалась не вся плоскость Лобачевского, а только ее часть, поскольку на любой псевдосфере имелись ограничивающие ее гладкую часть острые ребра. Впоследствии Д. Гильберт доказал, что полностью гладкой поверхности постоянной отрицательной кривизны не существует.

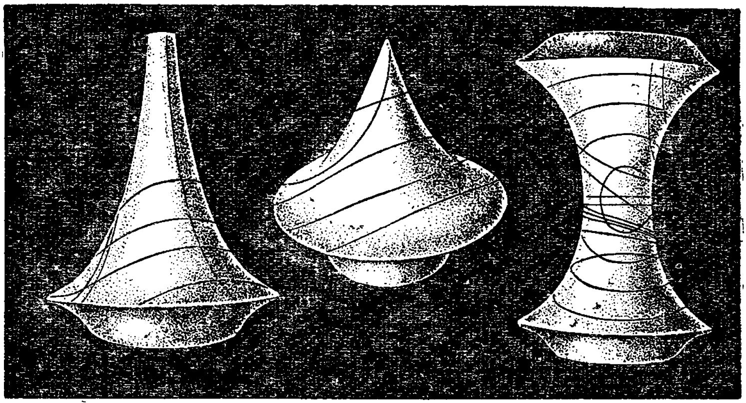


Рис. 29

лидовой геометрии стали оказывать все возрастающее влияние на развитие математики. В эти же годы была опубликована переписка Гаусса, и открылось его скрываемое ранее отношение к новой геометрии, что тоже способствовало признанию этих идей.

Другую интерпретацию, уже для всей плоскости Лобачевского, нашел через три года Ф. Клейн. Он опирался на результаты, полученные в проективной геометрии, т. е. геометрии, изучающей такие свойства фигур, которые сохраняются при центральных проектированиях плоскости на плоскость. В частности, таким свойством будет прямолинейность, так как прямая проектируется в прямую. Однако следует отметить, что здесь прямая рассматривается как замкнутая линия, ее замыкает бесконечно удаленная точка. Длины и углы — это не проективные понятия, так как при проектировании фигур длины и величины углов меняются.

Но в 1859 г. А. Кэли ввел понятие проективной метрики. Он установил, что если задана некоторая линия 2-го порядка (Кэли назвал ее абсолютом), то, используя левую часть ее уравнения (это однородная квадратичная форма, если пользоваться однородными проективными координатами), можно составить формулу, которая для любых двух заданных прямых (и соответственно для любых двух точек) будет принимать некоторое числовое значение. Причем для различных пар прямых эти числа обладают свойствами величин угла между прямыми (и соответственно величин расстояний между двумя точками). То есть при совпадении двух прямых (соответственно точек) получаем число нуль, а при образовании угла из двух прилежащих углов (соответственно отрезка из двух прилежащих отрезков одной прямой) эти числа складываются (говорят, что имеет место аддитивность).

Вместе с тем эти числа проективно инвариантны, т. е. они не изменяются, если и абсолют и рассматриваемые прямые (соответственно точки) подвергнуть любому проективному преобразованию. Выражения, дающие эти величины («проективный угол» и «проективное расстояние»), Кэли назвал проективной метрикой. Он также показал, что если абсолют мнимый, т. е. не имеет вещественных точек (его уравнению в однородных координатах можно тогда придать вид $x^2+y^2+z^2=0$), то проективная метрика совпадает с обычной метрикой сферической геометрии. Но здесь есть и не отмеченная им разница: две различные прямые здесь тоже всегда пересекаются, но не в двух, а только в одной точке. Такую геометрию впоследствии Ф. Клейн назвал эллиптической. В этой геометрии сумма углов треугольника больше π. Еще до работы Кэли такую геометрию рассматривал Б. Риман, но его работа была опубликована только в 1868 г.

Ф. Клейн сопоставил формулы Кэли с формулами Е. Бельтрами и обобщил результаты последнего. Бельтрами отображал при своих исследованиях поверхность псевдосферы внутрь круга таким образом, что геодезические линии изображались на плоскости прямыми, роль абсолюта здесь играла окружность. Клейн дал существенно более простые формулы для измерения расстояний.

Он изучил проективные преобразования, которые переводят точки абсолюта в точки того же абсолюта (говорят, что абсолют переводится в самого себя). Это будет аналог движения плоскости, так как степень подвижности здесь такая же, а проективные углы и длины при этом сохраняются.

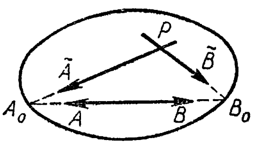


Рис. 30

В итоге в 1871 г. Ф. Клейн связал идеи проективной метрики с теорией параллелей и показал, что с помощью проективной метрики интерпретируется не только эллиптическая геометрия (абсолют мнимый), но и геометрия Лобачевского (он ее назвал гиперболической). Для интерпретации геометрии Лобачевского надо взять вещественный абсолют (его уравнение можно привести в однородных координатах к виду $x^2+y^2-z^2=0$) и рассматривать только точки, лежащие внутри абсолюта. Значит, роль прямых играют хорды, лежащие внутри абсолюта. Интерпретация Клейна построена на понятиях проективной геометрии (проективная интерпретация) и охватывает всю плоскость Лобачевского. Следовательно, вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского был решен полностью и окончательно.

Для пояснения рассмотрим рисунок 30. Здесь изображены точка P плоскости Лобачевского (точки, лежащие внутри круга) и прямая AB. Концы хорды A_0 и B_0 не принадлежат плоскости Лобачевского. Это изображения «бесконечно удаленных» точек прямой. Через P проведены к AB две параллели. Это $\widetilde{PB}$ (в одном направлении) и $\widetilde{PA}$ (в другом). Они проходят соответственно через бесконечно удаленные точки B_0 и A_0 прямой AB, но с прямой общих точек (в собственном смысле) не имеют. Они только сближаются с ней при удалении точки в бесконечность (т. е. при приближении точки к B_0 и соответственно к A_0). Легко представить себе пучок прямых, проходящих через P и пересекающих (AB), и пучок прямых (включая параллели), не пересекающих AB. Параллели являются крайними прямыми второго пучка, остальные его прямые — расходящиеся. Следует помнить, что величины расстояний и углов вычисляются при этом по особым формулам проективной метрики и не совпадают с обычными. Например,

$$|AB|=\ln\left(\frac{AA_0}{BA_0}:\frac{AB_0}{BB_0}\right).$$

Клейн показал также, что евклидова геометрия тоже может быть интерпретирована с помощью проективной метрики. Нужно только рассмотреть промежуточный случай между эллиптической и гиперболической метрикой. Роль абсолюта будет играть пара мнимых комплексно сопряженных точек на бесконечно удаленной прямой (его уравнение можно привести к виду x^2+y^2, $z=0$). Это случай параболической метрики. Еще до Клейна соответствующие этому случаю формулы для углов были даны французским математиком Э. Лагерром (1853).

Через одиннадцать лет после работы Ф. Клейна еще одна новая интерпретация геометрии Лобачевского была дана А. Пуанкаре. В 1882 г. он разрабатывал теорию очень важных по применениям функций комплексного переменного, теорию фуксовых (автоморфных) функций, которые находят разнообразные применения в механике и в теоретической физике.

При разработке этой теории он столкнулся с очень большими трудностями. Но затем неожиданно для себя он пришел к мысли, что геометрические свойства фигур, построенных из дуг окружностей, с которыми он имел дело, изучая свойства автоморфных функций, те же, что и свойства прямолинейных фигур в пространстве Лобачевского[1]. И на этом пути ему удалось преодолеть трудности. При этом он нашел и применил следующую интерпретацию.

Плоскость Лобачевского — внутренность обычной окружности. Прямые Лобачевского — дуги окружностей, пересекающих упомянутую окружность (абсолют) под прямыми углами и лежащие внутри нее. Величины углов обычные (поскольку углы имеют натуральную величину, эту интерпретацию называют конформной. Здесь в бесконечно малом сохраняется форма фигур). Однако вычисление длин надо производить по особым формулам, аналогичным проективной метрике.

Для пояснения на рисунке 31 изображена та же ситуация, что и на предыдущем рисунке 30. Рекомендуется сравнить и проанализировать эти рисунки. Заметим также, что с помощью этих моделей

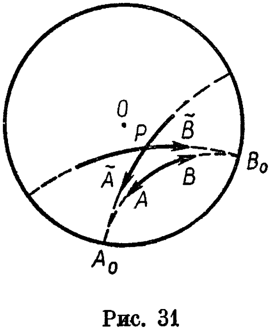


Рис. 31

[1] Он сам вспоминал впоследствии, что, поехав отдохнуть от своих неудач, он принял участие в геологической экскурсии и совсем о них позабыл. Но однажды, когда он только что вступил на подножку омнибуса, на котором должен был ехать дальше, у него внезапно возникла идея, что преобразования, им изучавшиеся, совпадают с движениями на плоскости Лобачевского. Потом, вернувшись, он проверил свою мысль, и все подтвердилось ([11], с. 453).

можно получить наглядные представления о некоторых результатах планиметрии Лобачевского.

Появление различных интерпретаций неевклидовой геометрии сыграло очень важную роль в разработке оснований математики. Началось дальнейшее уточнение и развитие аксиоматического метода и построение строгих аксиоматик для различных математических дисциплин. Аксиомы Евклида были переработаны и дополнены новыми аксиомами, которые ранее не были учтены, а именно аксиомами, характеризующими понятие порядка точек на прямой и на плоскости (Паш) и понятие непрерывности (Дедекинд, Кантор). Ранее при доказательствах свойств, связанных с этими понятиями, просто ссылались на чертежи, что иногда вызывало грубейшие ошибки. Была построена аксиоматика арифметики (Пеано) и проективной геометрии (Веблен) и др. Аксиоматика евклидовой геометрии была в известном смысле завершена в работах Д. Гильберта (1899) и В. Ф. Кагана (1902).

Метод интерпретаций стал важным средством доказательства непротиворечивости системы аксиом, предложенной для любой науки. Правда, это доказательство носит относительный характер, так как по существу вопрос только переносится в другую область, но зато в область хорошо изученной теории, в непротиворечивости которой нет оснований сомневаться.

Окончательный вывод формулируется так: исследуемая система аксиом непротиворечива постольку, поскольку непротиворечива используемая в интерпретации теория. Например, непротиворечивость своей системы аксиом для евклидовой геометрии Д. Гильберт свел к непротиворечивости арифметики.

Постепенно к концу XIX в. выявились основные требования, предъявляемые к системе аксиом, и принципы аксиоматического метода. Их можно изложить сжато следующим образом.

а) Вводятся в рассмотрение некоторые основные множества (и, может быть, их подмножества), элементы которых получают свои наименования или обозначения (например, точки A, B, ..., прямые a, b, ..., плоскости α, β, ... и т. п.).

б) Допускается, что эти элементы могут находиться в некоторых основных отношениях друг к другу. Например, в системе Гильберта «прямая проходит через точку, точка лежит между двумя другими» и т. п. В системе аксиом Колмогорова основное отношение — расстояние (отношение между парами точек и неотрицательными величинами). Эти отношения только называются, но их конкретный смысл никак не определяется.

в) Наконец, формулируются аксиомы, которые характеризуют свойства введенных основных отношений между элементами.

В математических выводах следует опираться только на логические выводы из аксиом (конкретное истолкование, наглядная картина только облегчают понимание).

Но чтобы эта система аксиом могла служить основой для логически выводимой содержательной теории (т. е. не такой теории, в которой вместе с каждым утверждением можно доказать и его отрицание), к ним предъявляются следующие требования.

1°. Система аксиом должна быть непротиворечивой. Непротиворечивость доказывается путем отыскания такой интерпретации, в которой все аксиомы системы выполняются. Как мы уже говорили, обычно доказывается условная непротиворечивость. Например, мы видели, что непротиворечивость системы аксиом геометрии Лобачевского сведена к непротиворечивости геометрии Евклида, непротиворечивость последней сведена к непротиворечивости арифметики.

2°. Система аксиом должна быть независимой. (Это требование не обязательно, но желательно.) В ней не должно содержаться лишних, избыточных аксиом, т. е. таких, которые можно доказать как теоремы, исходя из прочих аксиом.

Независимость какой-либо аксиомы (если, конечно, эта аксиома действительно невыводима из других аксиом) можно доказать следующим образом. Вместо исследуемой аксиомы вводят другую, противоречащую первой. Если после этого удастся доказать непротиворечивость этой новой измененной системы аксиом, то этим доказывается и независимость той аксиомы, которая была исключена. Действительно, если бы исключенная аксиома была зависима от прочих, то, хотя мы ее и исключили, она как теорема могла бы быть выведена из прежних остальных (пусть мы не знаем как), т. е. она стояла бы в противоречии с вновь введенной аксиомой; иначе говоря, новая система была бы противоречива. Поэтому если для новой системы удается найти интерпретацию, то этим и доказывается независимость прежней исключенной аксиомы от остальных аксиом прежней системы.

Такой подход к доказательству независимости исторически возник благодаря созданию неевклидовой геометрии. Аксиоматика геометрии Лобачевского отличалась от обычной евклидовой только тем, что в формулировке аксиомы параллельности вместо одной параллели допускалось существование большего числа прямых, не пересекающих данную. Поэтому, убедившись (с помощью построенной интерпретации) в непротиворечивости геометрии Лобачевского, мы получаем тем самым и доказательство независимости пятого постулата Евклида от прочих аксиом. Таким образом, создание геометрии Лобачевского одновременно доказало независимость пятого постулата Евклида от остальных его аксиом.

3°. Система аксиом должна быть полной. Это требование не всегда предъявляют к системе аксиом. Во многих теориях от него отказываются (например, в алгебре, в теории групп, и в некоторых геометрических теориях), но при аксиоматизации евклидовой геометрии оно ставится. Заключается оно в том, чтобы все интерпретации были изоморфны, т. е. чтобы между основными элементами и отношениями в любых двух интерпретациях можно было установить такое взаимно однозначное соответствие, что соответственные элементы всегда находятся в соответственных отношениях и в той и в другой интерпретации, хотя истолковываться и элементы и отношения могут в каждой интерпретации по-своему.

Для системы аксиом евклидовой геометрии доказательство того, что это требование выполняется, можно получить, например, путем рассмотрения некоторой декартовой системы координат, вводимой в пространстве. На этом пути устанавливается изоморфизм каждой интерпретации с арифметической интерпретацией, а следовательно, и всех интерпретаций между собой.

XI. ПОДХОД РИМАНА К УЧЕНИЮ О ПРОСТРАНСТВЕ. РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Б. Риман

Новый подход к развитию учения о неевклидовых пространствах был дан Бернгардом Риманом (1826—1866) в лекции «О гипотезах, лежащих в основе геометрии»[1], прочитанной при вступлении в должность профессора Геттингенского университета в 1854 г. (опубликована в 1868 г., посмертно). Он дал глубокое обобщение понятия пространства, исходя из идей Гаусса о внутренней геометрии поверхности (раздел X). Вместо термина «пространство» он стал употреблять термин «многообразие», элемент многообразия назван точкой. Точка (точнее, ее положение в многообразии) характеризуется числами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, названными ее координатами. Можно рассматривать не только многообразие точек поверхности, отнесенной к криволинейным координатам u и v $(x_1=u, x_2=v)$, но и, например, многообразие состояний механической системы, многообразие цветов спектра и др., так что число координат (или, иначе говоря, число измерений многообразия) может быть различно. Геометрия этого многообразия характеризуется, подобно случаю внутренней геометрии поверхности, выражением для линейного элемента, т. е. квадратом расстояния между двумя бесконечно близкими точками $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(x_1+dx_1, x_2+dx_2, \ldots, x_n+dx_n)$:

$$ds^2=g_{11}(dx_1)^2+g_{12}dx_1dx_2+g_{21}dx_2dx_1+\ldots+g_{nn}(dx_n)^2, \quad (*)$$

где $g_{ij}(x)=g_{ji}(x)$, т. е. порядок индексов i, j, можно менять, а символом (x) обозначена вся система значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

---

[1] Русский перевод см. в сборнике «Об основаниях геометрии». М., 1956, с. 309—325.

Систему функций $g_{ij}(x)$ часто записывают в виде матрицы (таблички):

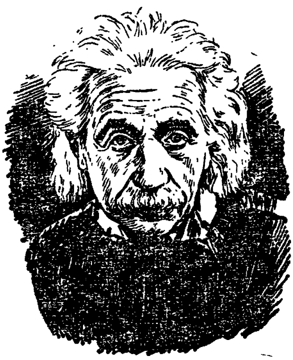
$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

Говорят, что такая система функций образует тензор с двумя ковариантными индексами i и j, причем его называют метрическим или фундаментальным (т. е. основным) тензором. Формула (*) выражает риманово мероопределение, или риманову метрику. Все свойства, выводимые из этой метрики и независимые от изменения координат, составляют **геометрию риманова пространства.**

Таким образом, геометрия римановых пространств является аналогом внутренней геометрии поверхности. В ней аналогично вводятся следующие геометрические понятия: «измерение длин дуг линий», «углов между пересекающимися линиями, площадей и объемов (различной размерности)», вводится понятие геодезической (кратчайшей) линии и, наконец, аналог гауссовой кривизны — кривизны в данной точке в данном двумерном направлении.

Отыскивая наиболее простые по своему строению типы пространств, Риман выделил **пространства постоянной кривизны** ($K=\text{const}$), т. е. такие, у которых кривизна не меняется, если менять двумерное направление в данной точке или переходить от точки к точке. Естественно, различаются три случая таких пространств: $K>0$ (положительной кривизны), $K=0$ (нулевой кривизны) и $K<0$ (отрицательной кривизны). Все эти пространства, и только они, обладают замечательным свойством свободной подвижности, т. е. при одинаковом K куски их, выражаясь условно, могут свободно налагаться друг на друга, подобно тому как это получается с поверхностями постоянной кривизны (раздел X).

Геометрию пространства постоянной положительной кривизны ($K>0$) называют теперь **геометрией Римана** или **эллиптической геометрией** (по Ф. Клейну). В этой геометрии геодезические линии замкнуты и имеют конечную постоянную длину. На двумерной плоскости две геодезические линии всегда пересекаются и притом в одной точке. В случае двух измерений ($n=2$)



А. Эйнштейн

получается как бы сферическая геометрия, но с той разницей (мы об этом уже упоминали), что пересечение двух геодезических линий происходит не в двух точках, а в одной.

Когда кривизна нулевая ($K=0$), получается параболическая (по Ф. Клейну) геометрия. Она совпадает с евклидовой геометрией, если линейный элемент может иметь только положительные значения, т. е. если он, как говорят, знакоположителен. Если это условие не выполнено, то геометрию называют псевдоевклидовой.

Геометрия постоянной отрицательной кривизны ($K<0$) совпадает с геометрией Лобачевского, но здесь она обобщена для любого числа измерений. Следуя Ф. Клейну, ее также называют гиперболической геометрией или геометрией Лобачевского — Бойаи.

Таким образом, пространство Лобачевского оказалось одним из трех частных случаев римановых пространств.

В разработке теории римановых пространств, начиная с 1868 г., приняли участие многие геометры: Е. Кристоффель, Р. Липшиц, казанский геометр Ф. М. Суворов, Л. Шлефли, Ф. Шур, В. Киллинг, Г. Риччи, Л. Бианки, Т. Леви-Чивита и другие.

Но особенное значение геометрии римановых пространств выявилось, когда она нашла применение в физических теориях и в механике. В 1905 г. была разработана специальная, или *частная, теория относительности*. Альберт Эйнштейн одновременно с А. Пуанкаре, опираясь на идею Лоренца о независимости электромагнитных процессов от равномерного прямолинейного движения (в случае скорости света это уже было подтверждено экспериментами Майкельсона), рассмотрел, какие изменения внесет это положение в механику. Был найден новый закон сложения скоростей, получена известная формула $E=mc^2$ (связь между массой и энергией, где c — скорость света), зависимость кинетической энергии от скорости. Пришлось изменить восходящую к Ньютону раздельную трактовку пространства и времени.

Оказалось, что пространственные расстояния и интервалы времени не имеют абсолютного значения и для двух двигающихся друг относительно друга систем связаны между собой так называемыми преобразованиями Лоренца. Относительность пространства и времени и абсолютный смысл определённой связи между ними и является сущностью этой теории. Физические явления стали изучать, рассматривая их в едином четырехмерном многообразии пространство — время (говорят также: в пространстве событий), элемент которого задается четырьмя координатами (x, y, z, t), где первые три координаты характеризуют пространственное положение события, а четвертая — положение во времени. Абсолютный смысл имеет аналог элемента длины в пространстве событий, так называемый мировой интервал. В специальной системе координат он выражается так:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 .$$

Эта метрика отличается от евклидовой знаком минус перед выражением c^2dt^2. Такие пространства стали впоследствии называть псевдоевклидовыми («не совсем евклидовыми»). Кривизна их тоже равна нулю, но ds^2 может быть и нулем и отрицательным.

Теория относительности коренным образом преобразовала понимание физических процессов. Она позволила связать химию и физику, а в дальнейшем, опираясь на эту теорию, удалось извлекать и практически использовать атомную энергию.

В дальнейших исследованиях, начиная с 1916 г., А. Эйнштейн развил общую теорию относительности, которой охватывались и явления тяготения, вызываемые распределением масс в пространстве. В качестве математического аппарата этой теории используется тоже четырехмерное риманово пространство, но оно уже не считается псевдоевклидовым, а является общим с метрикой (*) при $n=4$ (но с дополнительным условием, чтобы в окрестности каждой точки оно было близко по свойствам к псевдоевклидовому).

Задание тензора $g_{ij}(x)$ и характеризует строение поля сил тяготения. В дальнейшем эксперименты подтвердили объясняемое этой теорией явление отклонения светового луча силой тяготения Солнца.

С тех пор как римановы пространства стали играть важную роль в физических теориях, к ним возник все усиливающийся интерес. Это, конечно, способствовало более глубокому их изучению. Вскоре стали появляться и различные их обобщения — пространства аффинной, проективной и конформной связности, а также пространства различных опорных элементов (финслерово пространство, пространство Э. Картана и др.) и далее была развита теория так называемых расслоенных пространств. Существенный вклад в первоначальное развитие этих теорий был внесен Г. Вейлем, Э. Картаном, Я. Схоутеном, Л. Эйзенхартом, О. Вебленом, Т. Томасом, П. Финслером, Л. Бервальдом и другими.

В СССР, начиная с 20-х годов, сложилась значительная группа геометров, развивавших эту область тензорными методами. В Казанском университете это П. А. Широков (1895—1944) и его школа (И. П. Егоров, Б. Л. Лаптев, А. З. Петров, П. И. Петров и др.), в Московском университете — В. Ф. Каган (1869—1953) и его школа — участники семинара по векторному и тензорному анализу (В. В. Вагнер, Г. Б. Гуревич, А. М. Лопшиц, А. П. Норден, П. К. Рашевский, Б. А. Розенфельд, И. М. Яглом и др.). Каждый из упомянутых геометров создал свое научное направление исследований.

В заключение мы рассмотрим кратко исследования в области собственно геометрии Лобачевского. Здесь прежде всего следует указать на работы А. П. Котельникова (1865—1944), который в своих диссертациях — магистерской («Винтовое счисление», 1895) и докторской («Проективная теория векторов», 1899) заложил основы механики неевклидовых пространств, используя результаты так называемой геометрии над алгебрами. В работе 1927 г. «Принцип относительности и геометрия Лобачевского» он выделил особый класс неевклидовых пространств и указал, что в теории относительности пространство скоростей является пространством Лобачевского. П. А. Широков исследовал ряд важных вопросов геометрии и механики неевклидовых пространств, в том числе нашел новые признаки, выделяющие эти пространства из более общих — римановых, а затем нашел и изучил близкие к ним замечательные типы пространств — симметрические, приводимые и A-пространства.

Идеи А. П. Котельникова о разработке геометрий над алгебрами для изучения свойств неевклидовых пространств были развиты и обобщены А. П. Норденом, Б. А. Розенфельдом, А. П. Широковым, В. В. Вишневским и другими. Проблемы геометрии в целом, касающиеся свойств выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского, а также свойства поверхностей отрицательной кривизны, были исследованы А. Д. Александровым, Н. В. Ефимовым, А. В. Погореловым и их учениками.

Новый метод исследования обобщенных пространств — метод дифференциальных продолжений и охватов — был разработан (на основе метода внешних форм Э. Картана) московским геометром Г. Ф. Лаптевым (1909—1972), окончившим ранее Казанский университет. Он успешно применяется и в работах его учеников и последователей (М. А. Акивис, В. И. Близникас, А. М. Васильев, М. В. Васильева, Л. Е. Евтушик, Ю. Г. Лумисте, Н. М. Остиану и др.).

Была разработана также теория построений в пространстве Лобачевского (Д. Д. Мордухай-Болтовский, Н. М. Несторович, А. С. Смогоржевский и др.) и некоторые другие разделы этой геометрии.

Изучению жизни и творчества Лобачевского посвящена обширная литература. Созданы прекрасные и доступные изложения начал его геометрии (П. А. Широков, А. П. Норден, Б. Н. Делоне и другие), а также многочисленные очерки его жизни и деятельности. Нельзя не упомянуть также об отражении жизни и идей Лобачевского в художественной литературе: роман И. П. Заботина «Лобачевский» (М.—Л., 1956), повести М. Колесникова «Лобачевский» (М., 1965, Серия «Жизнь замечательных людей») и Д. Тарджеманова «Лобачевский» (Казань, 1976). Повесть А. Ливановой «Три судьбы» (М., 1975) посвящена созданию и истории неевклидовой геометрии.

XII. О ПРИМЕНЕНИЯХ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО В МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ. ФИЛОСОФСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

О применениях, которые дал своей геометрии сам Лобачевский, было уже сказано ранее. Убедившись, что данные астрономических наблюдений не могут служить прямым подтверждением или опровержением применимости его системы в реальном пространстве (раздел II), он получил с их помощью строгую оценку ошибок, возникающих, если применять геометрию Евклида вместо возможной, более общей геометрии. (Подробное обсуждение этих расчетов см. в книге А. П. Нордена [14].) Далее он показал, как «воображаемая» геометрия может применяться внутри самой математики, а именно в математическом анализе при отыскании значений определенных интегралов. Другим математическим приложением его геометрии является использование ее при разработке теории автоморфных функций, обобщающих периодические функции и находящих применения и в механике и в физике. Применение геометрии Лобачевского обеспечило успех в создании этой важной теории и служит и сейчас при разработке ее проблем.

Лобачевский был уверен, что его геометрия еще найдет применение в физике, что более общая, чем евклидова, она не может не отражать закономерностей самой природы. Он писал, например, что «такой Геометрии, может быть, следуют молекулярные силы», и, далее, предвосхищая идеи общей теории относительности Эйнштейна, он высказал свои убеждения так: «...в том, однако ж, нельзя сомневаться, что силы все производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы» (понятие силы включало в его время и понятие энергии), т. е. он утверждал связь и зависимость геометрических и временных свойств от распределения и состояния движущейся материи. Он был убежден, что на громадных, пока недостижимых для наблюдений протяжениях Вселенной действует именно его геометрия.

Развитие физики и космологии показало, что геометрия Лобачевского находит важные применения в теории относительности. Одно из таких приложений было получено русским физиком А. А. Фридманом (1888—1925). В 1922 г. он нашел важный вид линейного элемента, из которого следовало, что Вселенная расширяется с течением времени. Этот неожиданный факт потом был подтвержден американским астрономом Хэбблом, наблюдавшим в 1929 г. «разбегание» далеких туманностей, что проявлялось в смещении спектральных линий к красному концу. Метрика Фридмана при фиксированном времени оказалась пространством Лобачевского, поэтому физики называют теперь это четырехмерное риманово пространство пространством Фридмана — Лобачевского.

Другое, может быть наиболее значительное, приложение геометрии Лобачевского в теории относительности связано с рассмотрением пространства относительных скоростей. Это пространство (как отмечалось в разделе XI) оказалось пространством Лобачевского.

В 1950-х годах на эту связь обратил внимание академик В. Фок, а затем физики из Объединенного института ядерных исследований в Дубне Н. А. Черников, Я. И. Смородинский и другие начали с успехом применять геометрию Лобачевского при разработке вопросов физики элементарных частиц и ядерных реакций и пропагандировать свои методы.

Таким образом, «воображаемая» геометрия оказалась весьма действенным инструментом в разрешении проблем реального мира.

Нельзя также забывать, что появление неевклидовых геометрий сыграло важную роль в борьбе материалистической философии с идеалистической трактовкой пространства и времени в широко распространенной в XIX в. философии И. Канта. Кант полагал, что пространство и время не являются объективными формами существования материи, а проявляются лишь как формы нашего воззрения на мир, как формы нашего восприятия. Причем евклидова геометрия это единственная мыслимая геометрия, всем нам непосредственно очевидная, поскольку она порождена характером нашего воззрения на мир.

Появление новой геометрии — геометрии Лобачевского — отчетливо поставило вопрос об *эксперименте*, чтобы выяснить, какая из систем геометрии реализуется в физическом пространстве. Таким образом, объективная сущность пространства была отчетливо выявлена, а идеалистическая трактовка этого вопроса Кантом опровергнута.

Напряженная многолетняя деятельность Николая Ивановича Лобачевского, вдохновленного своим высоким идеалом ученого, отдающего все силы развитию науки и просвещения, принесла замечательные результаты. И если его научные идеи не были поняты современниками (так, ни один из его учеников не продолжил его геометрических исследований), то впоследствии они утвердили его имя как имя борца и революционера в науке, чьи смелые идеи, нарушили казавшиеся незыблемыми тысячелетние устои и во многом предопределили дальнейшее развитие математических наук.

Литература

1. Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений. М.— Л., 1946—1951 (5 томов):

Т. 1. Геометрические исследования по теории параллельных линий. О началах геометрии. М. — Л., 1946.

Т. 2. Геометрия. Новые начала. М. — Л., 1949.

Т. 3. Воображаемая геометрия. Применения воображаемой геометрии. Пангеометрия. М. — Л., 1951.

Т. 4. Сочинения по алгебре. М. — Л., 1948.

Т. 5. Сочинения по математическому анализу, теории вероятностей, механике и астрономии. М. — Л., 1951.

2. Лобачевский Н. И. Избранные труды по геометрии. М.— Л., 1956.

3. Лобачевский Н. И. Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма. М.— Л., 1976.

4. Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский. М.—Л., 1948.

5. Александров П. С. Н. И. Лобачевский — великий русский математик. М., 1956.

6. Александров П. С., Колмогоров А. Н. Николай Иванович Лобачевский (1793—1943). М., 1943.

7. Андронов А. А. Где и когда родился Н. И. Лобачевский. — «Историко-математические исследования», 1956, вып. 9.

8. Бойаи Я. Appendix. Приложение ... . М. — Л., 1950.

9. Герасимова В. М. Указатель литературы по геометрии Лобачевского и развитию его идей. М., 1952.

10. Каган В. Ф. Лобачевский и его геометрия. М., 1955.

11. Каган В. Ф. Лобачевский. М. — Л., 1948.

12. Кутузов Б. В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии. М., 1950.

13. Лаптев Б. Л. О библиотечных записях книг и журналов, выданных Н. И. Лобачевскому. — «Успехи математических наук», 1959, вып. 5.

14. Норден А. П. Элементарное введение в геометрию Лобачевского. М., 1953.

15. Норден А. П. Гаусс и Лобачевский. — «Историко-математические исследования», 1956, вып. 9.

16. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию его идей. М., 1956.

17. Рыбкин Г. Ф. Материализм — основная черта мировоззрения Н. И. Лобачевского. — «Историко-математические исследования», 1950, вып. 3.

18. Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского (1826—1951). М. — Л., 1952.

19. Федоренко Б. В. Некоторые сведения к биографии Н. И. Лобачевского. — «Историко-математические исследования», 1956, вып. 9.

20. Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. Казань, 1964; М., 1955.

21. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 г. М., 1968, с. 229—273.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Борис Лукич Лаптев

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ И ЕГО ГЕОМЕТРИЯ

Редактор *Л. М. Котова*
Художник *Б. Л. Николаев*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *С. А. Птицына*
Корректор *Н. И. Новикова*

Сдано в набор 6/IV 1976 г. Подписано к печати 15/X 1976 г. 84×108$^1/_{32}$. Бумага тип. № 3. Печ. л. 3,5. Условн. л. 5,88. Уч.-изд. л. 5,89. Тираж 100 тыс. экз. А 05784.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Областная типография управления издательств, полиграфии и книжной торговли Ивановского облисполкома, г. Иваново-8, ул. Типографская, 6.

Заказ № 3105.

Цена 15 к.

15 коп.